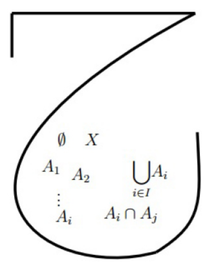
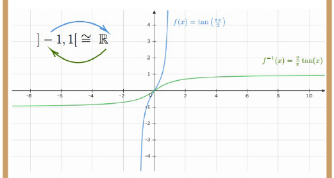
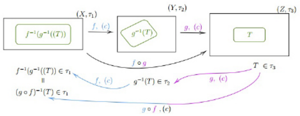
ESKİŞEHİR OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ



ADIM ADIM TOPOLOJİ İLK ADIM

Koray YILMAZ
Elis SOYLU YILMAZ





Adım Adım Topoloji
İlk Adım

Koray Yılmaz
Elis Soylu Yılmaz

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Yayınları No: 402

Sahibi : Prof. Dr. Kâmil ÇOLAK (Rektör)
Yayın Yönetmeni : Prof. Dr. Emine GÜMÜŞSOY (Rektör Yardımcısı)
Yayın Komisyonu : Prof. Dr. Emine GÜMÜŞSOY (Rektör Yardımcısı)
Prof. Dr. Mahmut KEBAPÇI
Prof. Dr. Haldun KURAMA

İdari Sorumlu : Mustafa ARSLAN
İ.M.İ.D. Başkanı
Basımevi Sorumlusu : Yüksel ASLAN
ESOGÜ Basımevi Şube Müdürü

Kapak Tasarım
Prof. Dr. Şirin ŞENGEL

Dizgi
Koray YILMAZ
Elis SOYLU YILMAZ

ISBN NO
978-605-9975-91-9

1. Baskı

Baskı Tesisleri
ESOGÜ Basımevi

T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı Matbaa Sertifika No.: 64281

ESKİŞEHİR 2024

İçindekiler

ÖNSÖZ

Bu kitap, fen edebiyat fakültelerinde okutulmakta olan Genel Topoloji dersleri için hazırlanmıştır. Kitabın içeriği, öğrencilerin topolojiye sağlam bir temel oluşturmalarına yönelik olarak düzenlenmiştir. Birinci bölüm, topolojik uzaylar ve temel tanımlar üzerine odaklanmaktadır. Topolojinin tanımı, örnekler ve önemli topolojiler bu bölümde ele alınmıştır. İkinci bölüm ise türev kümeleri ve ilişkili kavramları detaylandırmakta, bir kümenin kapanışını, iç noktalarını, sınırını, yığılma ve izole noktaları kavramları üzerinde durmaktadır. Üçüncü bölüm, sürekli fonksiyonlar ve homeomorfizm kavramları ile topolojik dönüşümlere giriş sağlamaktadır. Dördüncü bölüm ise mevcut topolojiden yeni topolojiler elde etme yöntemlerini, başlangıç ve çarpım topolojilerini incelemekte, böylece topolojik yapıları anlamaya yardımcı olmaktadır.

ÖN BİLGİLER

Bu bölümde kitabın anlaşılabirliğini arttırmak amacıyla ilk olarak kitapta geçen temel bilgileri ve ispat yöntemlerini vereceğiz. Ardından topolojinin kelime anlamını topolojinin ve graf teorinin çıkış problemi kabul edilen örnek ve güncel örnekleri vereceğiz.

Reel Sayılar

Doğal sayılar

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

sayma işleminde doğal olarak ortaya çıkan sayılardır ve bazen sayma sayıları olarak adlandırılırlar. Tarihsel olarak sıfır, sayma sayılarından çok daha sonra tanımlandı. Sayılar, nesneleri saymak için kullanıldı. Eğer hiçbir nesneniz yoksa, saymanız gerekmez ve hiçbir şeyi saymak için bir sayıya ihtiyacınız olmaz. Doğal sayılar, sıfır ile birlikte tüm rakamların kümesini oluştururlar. Negatif sayılar daha sonraki dönemlerde yaygın bir şekilde kullanılmaya başlandı. Tüm sayılar, negatifleriyle birlikte tam sayıların kümesini oluşturur, gösterim olarak

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

ile ifade edilir. $\mathbb{Z}$ notasyonu, "sayılar" anlamına gelen Almanca kelime "Zahlen"den gelir. Tam sayıların oranları, bize rasyonel sayı kümesini

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

verir. $\mathbb{Q}$ notasyonu tam sayıların bölümlerini göstermek için kullanılır[1]. Antik Yunanlar, pozitif tam sayıları ve pozitif tam sayıların oranlarını kullanmada çok yetenekliydiler. Birim karenin köşegeninin uzunluğu gibi bazı sayıların tam sayı oranları olmadığını keşfettiklerinde memnun olmadılar. Bu tür sayılar irrasyonel sayılar olarak adlandırılır ve irrasyonel sayılar $\mathbb{Q}^t$ notasyonu ile gösterilir. Rasyonel sayıların ve irrasyonel sayıların kümesinin birleşimi reel sayıların kümesi $\mathbb{R}$ notasyonu ile gösterilir.

[1] İngilizce'de quotient kelimesi bölüm anlamına gelir.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$
$$\bigcap$$
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$
$$\bigcap$$
$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$
$$\mathbb{Q}^t = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \ \notin \mathbb{Q}\} \qquad \bigcap$$
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^t$$

Kümeler

Varsayalım ki değerlendirmeye aldığımız birkaç nesne var ve bu nesnelerden oluşan bir liste oluşturup daha fazla inceleme yapmak istiyoruz. Değerlendirmeye alınan nesnelerin tamamı E evrensel kümesini oluşturur ve seçilmiş nesnelerin iyi tanımlı bir listesi evrensel küme içinde bir A kümesini verir. Bir A kümesine dahil edilen nesnelere A kümesinin elemanlarıdır. Eğer a, küme A kümesinin bir elemanı ise $a \in A$ şeklinde yazarız. Eğer A ve B, E evresel kümesindeki iki küme ise ve A kümesinin her elemanı B kümesinin bir elemanı oluyorsa, A kümesine B kümesinin bir alt kümesidir denir ve $A \subseteq B$ olarak gösterilir. Elemanı olmayan küme boş küme olarak adlandırılır, $\emptyset$ notasyonu veya $\{\ \}$ ile gösterilir. $A, B \subset E$ olmak üzere bazı tanımları şu şekilde verebiliriz.

İfade	Gösterim
A ve B kümelerinin birleşimi	$A \cup B = \{x : x \in A \text{ veya } x \in B\}$
A ve B kümelerinin arakesiti	$A \cap B = \{x : x \in A \text{ ve } x \in B\}$
A kümesinin tümleyeni	$E - A = \{x \in E : x \notin A\}$
A fark B kümesi	$A - B = \{x : x \in A \text{ ve } x \notin B\}$
B kümesinin A kümesindeki tümleyeni	$A - B = A \cap (E - B)$

Eğer $A \subseteq B \subseteq U$ ise, o zaman $U - B \subseteq U - A$ olur; yani daha küçük bir kümenin daha büyük bir tümleyeni vardır. İki küme A ve B, $A \cap B = \emptyset$ ise ayrık kümelerdir. Sonlu bir A kümesinin eleman sayısına A kümesinin kardinalitesi denir ve $|A|$ ile gösterilir.

Elemanları kümeler olan bir koleksiyonu aile denir. Kümenin elemanları küçük harflerle gösterilir, kümeler büyük harflerle gösterilir ve aileler büyük kaligrafik harflerle gösterilir. A kümesinin tüm alt kümelerinin koleksiyonu, A kümesinin kuvvet kümesi olarak adlandırılır ve $\mathcal{P}(A)$ şeklinde gösterilir.

Genellikle, kümelerin bir koleksiyonu $\mathcal{C}$ ailesini her bir elemanına bir isim vermeye ihtiyaç duyduğumuzda $\mathcal{C} = \{A_i : i \in I\} = \{A_i\}_{i \in I}$ şeklinde yazabiliriz. Burada i bir indeks, I indeks kümesi ve $\mathcal{C}$ indekslenmiş aile olarak adlandırılır. Eğer $\mathcal{C} = \{A_i : i \in I\}$

ise, $\mathcal{C}$ ailesinin birleşimi ve arakesiti

$$\bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i, \text{bazı } i \in I \text{ için}\},$$
$$\bigcap \mathcal{C} = \bigcap_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i, \text{her } i \in I \text{ için}\}.$$

olarak yazılır.

Eğer indeks kümesi I sonlu ise, o zaman kesişim $\bigcap_{i \in I} A_i$ sonlu kesişim olarak adlandırılır. Yani, sonlu bir kesişim, küme koleksiyonunun sonlu bir kesişimidir. Eğer indeks kümesi üzerinde hiçbir kısıtlama verilmemişse, keyfi bir kesişimden bahsedebiliriz. Genelde, keyfi kesişim, sonlu veya sonsuz koleksiyonun kesişimini belirtir. Benzer terimler birleşimler için de geçerlidir.

E evrensel kümesinin boş küme tarafından indekslenmiş bir altküme koleksiyonu için

$$\bigcap_{i \in \varnothing} A_i = E \quad \text{ve} \quad \bigcup_{i \in \varnothing} A_i = \emptyset.$$

elde edilir. Sezgisel olarak, ne kadar çok küme kesişimi olursa kesişim o kadar küçülür, bu nedenle ne kadar az küme kesişimi olursa, kesişim o kadar büyür; hiçbir küme kesişimi almak en büyük olası küme olan E evrensel kümesini verir. Benzer şekilde, ne kadar az küme birleşimi olursa, sonuç o kadar küçülür, bu nedenle hiçbir küme birleştirme, en küçük olası küme olan boş kümeyi, $\emptyset$, verir.

Birleşimlerin veya kesişimlerin tümleyenlerini almak için kurallar, İngiliz matematikçi Augustus De Morgan (1806–1871) tarafından verilmiştir. De Morgan Yasaları olarak bilinen eşitlikler, bir kesişimin tümleyeninin tümleyenlerin birleşimi olduğunu ve bir birleşimin tümleyeninin tümleyenlerin kesişimi olduğunu belirtir. Yani,

$$E - \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (E - A_i)$$

ve

$$E - \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (E - A_i)$$

Sıkça kullanılan başka bir özellik, kümelerin kapsaması ile ilgilidir. Eğer her $i \in I$ için $A_i \subseteq B_i$ ise, o zaman

$$\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i \quad \text{ve} \quad \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i$$

olur. Verilen A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

kümesi olarak tanımlanır; burada a, A kümesinin bir elemanını ve b, B kümesinin bir elemanını temsil eder. Eğer $\{A_i\}_{i \in I}$ kümelerin bir koleksiyonu ise, koleksiyonun kartezyen çarpımı

$$\prod_{i \in I} A_i$$

her $i \in I$ için $x_i \in A_i$ olan tüm $(x_i)_{i \in I}$ vektörlerinin kümesidir.

Mantık ve Niceleyiciler

Bir ifade, doğru ya da yanlış olan bir cümledir. Eğer S ve T ifadeleri için, S ifadesi T ifadesini gerektiriyorsa $S \Rightarrow T$ şeklinde yazılır. $S \Rightarrow T$ gösterimi, S doğru olduğunda her zaman T ifadesinin de doğru olduğu durumlarda doğrudur. Eğer $S \Rightarrow T$ ise, o zaman S ifadesinin bir sonucu T ifadesidir. Kitapta kullanadığımız niceleyicileri ve mantıksal ifadeleri aşağıdaki gibi verebiliriz.

$\forall$	Her
$\exists$	Vardır bir
$\in$	Ait
$\notin$	Ait değil
$\Rightarrow$	Gerek şart veya ise
$\Leftarrow$	Yeter şart
$\Leftrightarrow$	Gerek ve yeter şart veya ancak ve ancak
$\ni$	Öyle ki
$\wedge$	Ve
$\vee$	Veya
$\sim p$	p ifadesinin değili

Niceleyici ve mantıksal ifadeleri kullanarak matematiksel bir ifadeyi evrensel bir şekilde ifade edebiliriz. Örneğin

"Y kümesinin her elemanı için X kümesinde $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir x elemanı vardır" ifadesini

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \quad \ni f(x) = y$$

olarak yazabiliriz. Ancak ve ancak ifadesi tanımlamalarda veya bir yapının kriterlerini vermek için kullanılabilir. Ayrıca bir ifade tanımlandığında aynı zamanda ifadenin değilide tanımlanmış olur. Örneğin $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde A kümesi 50 sayısından büyük olan reel sayılar ise A kümesine ait olma tanımını

$$x \in A \iff x > 50$$

olarak verebiliriz. Bu durumda aynı zamanda A kümesine ait olmama tanımı olan

$$x \notin A \iff x \leqslant 50$$

kriteride verilmiş olur. Şimdi bu kitapta kullandığımız bazı ispat yöntemlerine kısaca değineceğiz.

$$p \Rightarrow q \iff \sim q \Rightarrow \sim p$$

olduğundan $p \Rightarrow q$ ifadesini göstermenin daha karmaşık olduğu durumlarda $p \Rightarrow q$ ifadesi olan $\sim q \Rightarrow \sim p$ ifadesini göstererek dolaylı ispat yapacağız.

Doğrudan ispatı kullanmanın karmaşık veya zor olduğu durumlarda kullandığımız bir yöntem de "Olmayana Ergi" ispat yöntemidir. Latince saçma olana indirgeme (Reductio ad absurdum) anlamına gelen bir iddiayı doğru kabul ederek saçma bir sonuca varıp iddianın yanlış olduğu sonucuna ulaşıldığı bir mantık yöntemidir.

Örnek 0.0.1 *A ve B kümeleri sonlu iki küme olmak üzere $A \cap B$ kümesinin sonlu olacağını olmayana ergi yöntemi ile gösterelim.*

Çözüm:

A ve B kümeleri sonlu olsun. Kabul edelim ki $A \cap B$ kümesi sonlu olmasın.
$A \cap B \subset A$ olması A kümesinin sonlu olması ile çelişir. Kabulümüz yanlıştır.
$A \cap B$ kümesi sonlu olmalıdır.

İfadenin değilini kabul edeceğiz. Kolaylık olması için kabulümüzü kırmızı ile yazacağız

Bir çelişkiye ulaştığımızda kırmızı ile yazdığımız kabulümüz yanlış olacaktır. Buradan kabulümüzün değili doğru olacaktır.

□

Fonksiyonlar

X ve Y kümeleri için, X kümesinden Y kümesine bir fonksiyon, her X elemanına bir Y elemanı atayan bir kuraldır.

f fonksiyonunun X kümesinden Y kümesine bir fonksiyon olduğunu belirtmek için

$$f : X \to Y$$

şeklinde yazılır. X kümesi, fonksiyonun tanım kümesi ve Y kümesi, fonksiyonun görüntü(değer) kümesi olarak adlandırılır. $f : X \to Y$ fonksiyonu;

fonksiyonunun kuralı

$$\begin{array}{cccc} f : & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & f(x) = y \end{array}$$

Görüntü kümesinin altına görüntü kümesinin elemanı yazılır

$\mapsto$ işareti tanım kümesinin elemanını **taşır**, **götürür**, **resmeder** anlamına gelir

Tanım kümesinin elemanı tanım kümesinin altına yazılır şeklinde ifade edilir.

Eğer $f : X \to Y$ bir fonksiyon ise ve $x \in X$ için f fonksiyonunun x elemanınını atadığı biricik Y kümesinin elemanı $f(x)$ şeklinde gösterilir ve buna f fonksiyonunun x noktasındaki değeri veya x elemanının f fonksiyonu altında görüntüsü denir.

f, tanım kümesindeki her elemana bir değer atamak zorundadır, ancak görüntü kümesindeki her elemana atanan bir x elemanı olmak zorunda değildir.

$f(X) = \{f(x) : x \in X\} \subseteq Y$ olarak tanımlanan küme, f fonksiyonunun görüntüsü veya aralığı olarak adlandırılır.

Bir fonksiyon $f : X \to Y$ örten (sürjektif) ise, $f(X) = Y$ olup, her $y \in Y$ için, $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ bulunur.

Bir fonksiyon $f : X \to Y$ birebir (injektif) ise, $w \neq x \Rightarrow f(w) \neq f(x)$ veya eşdeğer olarak $f(w) = f(x) \Rightarrow w = x$ olmalıdır. Eğer $f : X \to Y$ bir bijektif fonksiyon ise, o zaman herhangi bir $y \in Y$ için, f örten olduğundan $f(x) = y$ olacak şekilde $x \in X$ mevcuttur ve f birebir olduğundan bir $x \in X$ için biricik $f(x) = y$ vardır. Böylece, $f^{-1} : Y \to X$ mevcut olup $f^{-1}(y) = x$ eşitliği ile bir fonksiyon olur. $f^{-1} : Y \to X$ fonksiyonuna $f : X \to Y$ fonksiyonunun tersi denir.

$f : X \to Y$ fonksiyonunun birebir olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun sağ tersinin olmasıdır. Eğer f fonksiyonunun sağ tersi var ise f fonksiyonuna sağ tersinirdir denir.

$$f : X \to Y \text{ birebir } \iff ff^{-1} = Id \qquad ...(Id \text{ birim fonksiyon})$$

$f : X \to Y$ fonksiyonunun örten olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun sol tersinin olmasıdır. Eğer f fonksiyonunun sağ tersi var ise f fonksiyonuna sol tersinirdir denir.

$$f : X \to Y \text{ örten } \iff f^{-1}f = Id$$

$f : X \to Y$ fonksiyonunun tersinir olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun sağ tersinir ve sol tersinir olmasıdır.

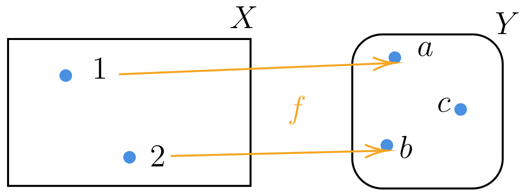
$$f : X \to Y \text{ tersinir } \iff ff^{-1} = Id \ \wedge \ f^{-1}f = Id$$

$f : X \to Y$ bir fonksiyon, $A \subseteq X$ ve $B \subseteq Y$ olsun. $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ kümesine, A kümesinin f fonksiyonu altında görüntüsü denir. $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ kümesine, B kümesinin fonksiyonu f altında öngörüntüsü denir. Bir kümenin öngörüntüsü, f fonksiyonunun ters fonksiyonu olup olmadığına bakılmaksızın tanımlıdır.

Örnek 0.0.2 *$X = \{1, 2\}$ ve $Y = \{a, b, c\}$ olmak üzere $f : X \to Y$ fonksiyonu $f(a) = 1$, $f(b) = 2$ olarak tanımlansın. Bu durumda*

- *f fonksiyonu örten olmadığından sağ tersi yoktur. Dolayısıyla f fonksiyonunun tersi yoktur.*

- *Y kümesindeki alt kümelerin öngörüntüleri*



$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \qquad f^{-1}(\{a\},\{c\}) = \{1\}$$
$$f^{-1}(\{a\}) = \{1\} \qquad f^{-1}(\{b\},\{c\}) = \{2\}$$
$$f^{-1}(\{b\}) = \{2\} \qquad f^{-1}(\{c\}) = \emptyset$$

$$f^{-1}(Y) = f^{-1}(\{a,b,c\}) = \{1,2\} = X$$

olarak bulunur.

Teorem 0.0.3 *$f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun Her $A, B \subset X$ ve $C, D \subset Y$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
- *f fonksiyonu birebir ise* $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
- $f(A - B) \supseteq f(A) - f(B)$
- *f fonksiyonu birebir ise* $f(A - B) = f(A) - f(B)$
- $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
- $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
- $f^{-1}(C - D) = f^{-1}(C) - f^{-1}(D)$
- $ff^{-1}(C) \subseteq C$
- *f fonksiyonu örten ise* $ff^{-1}(C) = C$
- $f^{-1}f(A) \supseteq A$
- *f fonksiyonu birebir ise* $f^{-1}f(A) = A$

Sayılabilir Küme

Sonlu bir kümenin elemanlarını saymak için, elemanlar ile

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n\}$$

doğal sayılar kümesi arasında birebir eşleme (yani, bir bijeksiyon) kurulabilir. A ve B kümesinin aynı kardinaliteye sahip olduğunu, $|A| = |B|$ olarak gösteririz. Buradan A kümesinden

B kümesine bir bijeksiyon tanımlanabilir. A kümesi sayılabilir sonsuz ise, doğal sayıların kümesi $\mathbb{N}$ ile aynı kardinaliteye sahiptir. Yani, A kümesi sayılabilir sonsuz olması için A kümesinden $\mathbb{N}$ kümesine bir bijeksiyon $f : \mathbb{N} \to A$ tanımlanabilmelidir. Bir küme, yalnızca sonlu veya sayılabilir sonsuz ise sayılabilir olarak kabul edilir. Bir küme sayılabilir değilse, o zaman sayılabilir küme değildir denir.

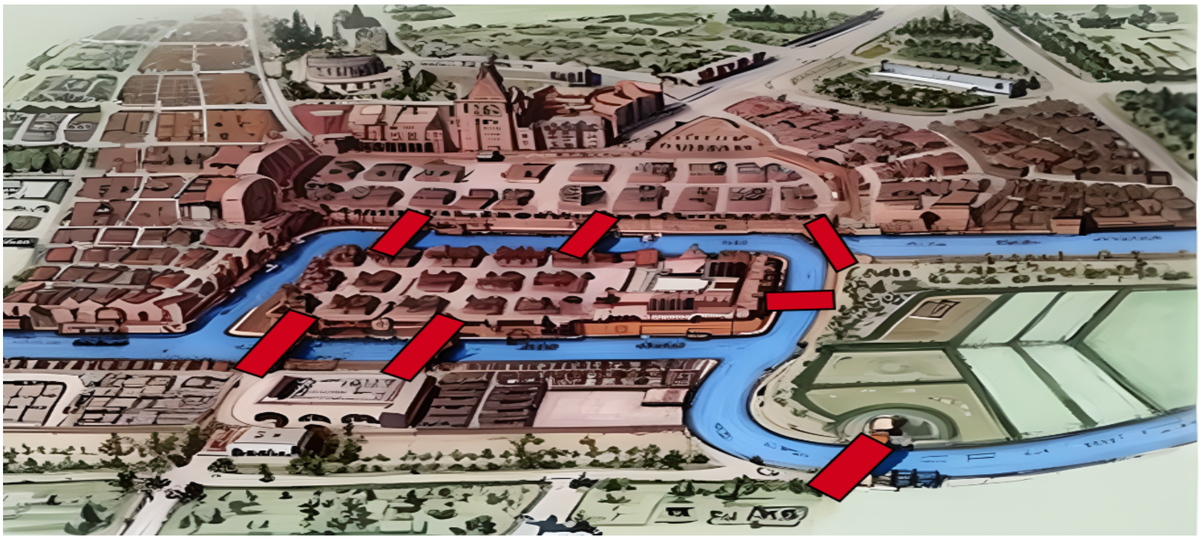
Örneğin, $\{1, 8, 27, 64, 125, \ldots\} = \{n^3 : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi sayılabilir sonsuzdur, çünkü $f : \mathbb{N} \to \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$ olarak tanımlanan $f(n) = n^3$ fonksiyonu bijektif olur.

Teorem 0.0.4
- *Sayılabilir bir B kümesinin her A alt kümesi sayılabilirdir.*
- *Eğer $f : A \to B$ birebir ve B kümesi sayılabilir ise, A kümesi sayılabilirdir.*
- *Eğer $f : A \to B$ örten ise ve A kümesi sayılabilir ise, B kümesi sayılabilirdir.*
- *Eğer A ve B kümeleri sayılabilir sonsuz kümeler ise, $A \cup B$ kümesi sayılabilir sonsuzdur.*
- *Eğer A ve B kümeleri sayılabilir sonsuz kümeler ise, $A \times B$ kümesi sayılabilir sonsuzdur.*
- *Eğer $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sayılabilir sonsuz A_n kümelerinin sayılabilir bir koleksiyonu ise, o zaman $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} An$ kümesi sayılabilir sonsuzdur.*

Teorem 0.0.5 *$\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi sayılabilir bir kümedir. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi sayılabilir bir küme değildir.*

Topolojinin Temelleri

Königsberg Köprüleri Problemi, topolojinin doğmasına neden olan bir problem olarak kabul edilir. Eski Prusya'daki Königsberg kentinde Pregel ırmağı, aşağıdaki şekilde görüldüğü üzere bir ada ve bir yarımada oluşturuyor.

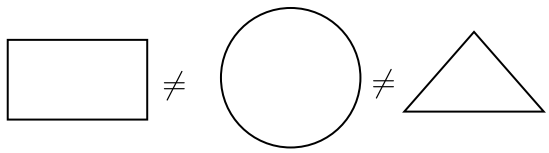


Şehirdeki bu yedi köprüyü sadece bir kez geçerek aynı noktadan başladığınız yere geri dönebilir mi sorusu üzerine şehir sakinleri farklı noktalardan başlayarak yedi köprüyü birer kez geçmeye çalıştılar, ancak hiçbiri başaramadı. 1735 yılında Euler, bu gezinin imkansız olduğunu matematiksel olarak kanıtlayan bir çözüm sundu. Euler'in bu ispatı, 1741 yılında "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis" başlığı altında akademik bir dergide yayınlandı. Makalenin adından da anlaşılacağı gibi, Euler uzaklık ve ölçü kavramlarına dayanmayan, ancak konumlarla ilgili olan yeni bir geometri türünün potansiyelini kavramıştı. Bu nedenle, bazılarına göre bu durum, topolojinin başlangıcını olarak kabul edilmektedir.

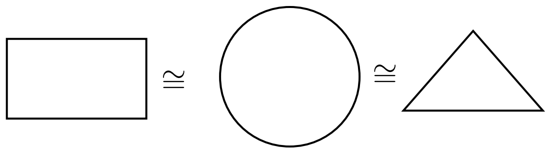
Topoloji kelimesi, Yunanca "topos" (yüzey veya yer) ve "logos" (bilim) kelimelerinin birleşiminden türetilmiştir.

$$\begin{array}{cccccc} \text{Topoloji} & = & \text{Topos} & + & \text{Logos} \\ & & \text{yerler} & & \text{lojik, bilim} \\ & & \text{(topografya gibi)} & & \text{(biyoloji gibi)} \end{array}$$

Topolojinin temel amacı, uzayları veya şekilleri incelemek ve bu uzayların sürekli deformasyonlar (homeomorfizmalar) altında hangi özelliklerinin korunduğunu belirlemek ve bu uzayları sınıflandırmaktır. Homeomorfizm, bir uzayın diğerine sürekli bir şekilde dönüşebilmesi anlamına gelir Bükme, germe,uzatma gibi ancak yırtma, yapıştırma vb. değil. Uzayların temel topolojik özellikleri ancak bu dönüşümler altında korunur.



Geometrik olarak eşit değiller



Topolojik olarak eş yapılar

Bir metroya bindiğimizde durakların sırasını gösteren

şeklinde durakların isminin sırayla yazılı olduğu bir harita görürüz. Bu harita durakların sırası korunarak yapılmış ve ardışık her durak arası mesafe eşit olarak alınmıştır. Duraklar arası gerçek uzaklıktanda anlaşılacağı üzere uzaklık bir topolojik özellik değildir. Sürekli dönüşüm bu bilgiyi ihmal etti ancak hala bize seyahatimize devam edebilmemiz için gerekli bilgiye sahip.

Euler Karakteristiği

Euler karakteristiği χ, bir yüzeyin bölünmesinin bir alt bölümünün aşağıdaki formül kullanılarak hesaplanmasıdır

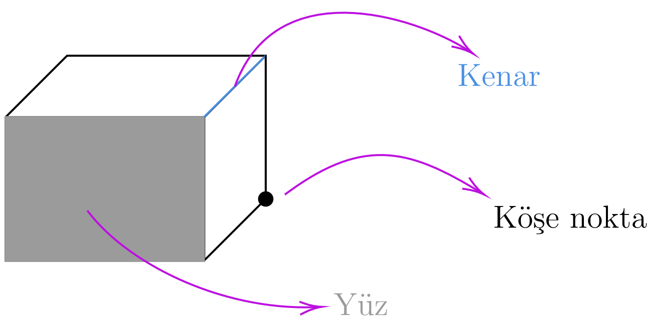
$$\chi = V - E + F$$

Bu formülde:

- V, bölümün içindeki köşe noktaların (vertex) sayısını temsil eder.

- E, yüzeyin içindeki kenarların (edge) sayısını temsil eder.

- F, yüzeyin içindeki yüzeylerin (face) sayısını temsil eder.



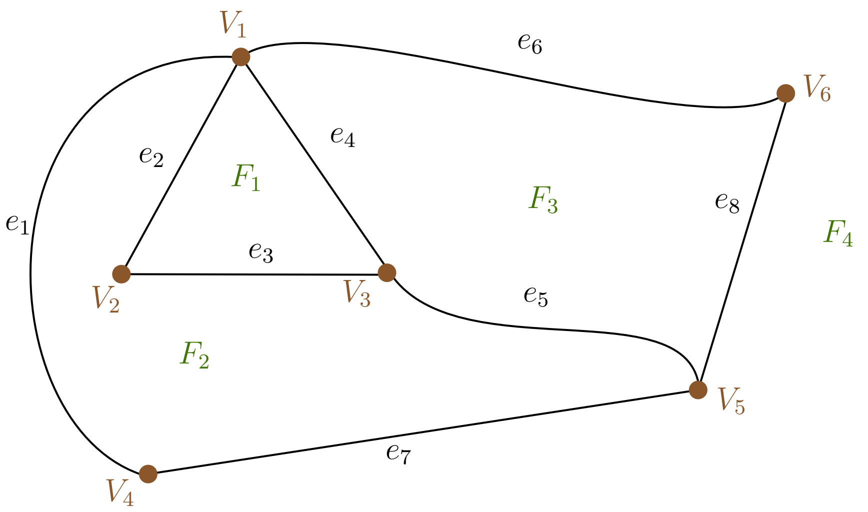
Euler karakteristiği, bir topolojik bir değişkendir, yani yüzey nasıl bölünmüş veya daha küçük bölgelere ayrılmış olursa olsun, bu formül aynı kalır. Bu formül, topoloji alanında temel bir kavramdır ve yüzeylerin ve diğer topolojik uzayların özelliklerini ve sınıflandırılmasını incelemek için kullanılır. Bu formül, yüzeyin topolojisi hakkında önemli bilgiler sağlayan köşe, kenar ve yüzey sayıları arasındaki ilişkiyi açıklar.

Euler, herhangi bir çokyüzlüde, köşelerin sayısı V ile yüzeylerin sayısının F, kenarların sayısından E iki fazla olduğunu gözlemledi. Diğer bir deyişle, Euler'in çokyüzlüler için formülü

$$V - E + F = 2$$

şeklindedir. Euler karakteristiği kavramı, 3 boyutlu yüzeyleri ve daha yüksek boyutlardaki yüzeyleri inceleme olanağı sağlayan çok faydalı bir topolojik araç haline gelmiştir.

Örnek 0.0.6 *$V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$ köyleri, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ birbiri ile kesişmeyecek şekilde köyler arasındaki yolları ve $F = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ yolların arasında kalan tarlaları temsil etmek üzere aşağıdaki şekili göz önüne alalım.*



yolların dışında kalan tarla F_4

Burada;

$V = 6$ *(Köy sayısı)*

$E = 8$ *(Köyler arası yolların sayısı)*

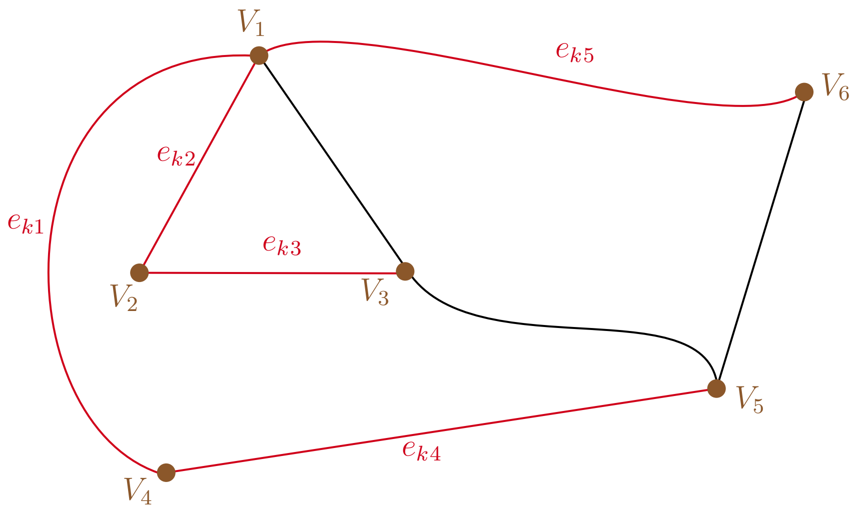
$F = 4$ *yolların sınırladığı tarlaların sayısı*

olduğundan

$$V - E + F = 6 - 8 + 4 = 2$$

olarak bulunur. Herhangi sayıda köy,yol ve tarla için yollar kesişmeyecek şekilde her zaman $V - E + F = 2$ olacaktır(deneyiniz ✎[2]). Şimdi köyler arasındaki yollar bir döngü oluşturmayacak şekilde yani her köye gitmenin sadece bir yolun olduğu bir alt sistem çizelim.

[2]Bu kitapta ✎ simgesi okuyucaya alıştırma olarak bırakılmıştır anlamında kullanılacaktır.



Kırmızı yollar ile çizdiğimiz yeni sistemimizin köy sayısı V_K, ilk sistemimizdeki köy sayısına eşittir.

$$V_K = V$$

Şekillere baktığımızda ilk sistemimiz ile ikinci sistemimiz arasındaki yol sayısı farkı 3 olarak görülür. Ama genel bir ifade yazarak genel bir çözüm bulmak istiyoruz. Dikkat edilirse kırmızı sistemde olmayan her bir siyah yol çizilmesi durumunda bir tarla oluşturacaktır. Burada yolların dışında kalan tarla hariç. Öyleyse genel olarak

$$E = E_K + (F - 1)$$

yazabiliriz. Kırmızı yolların olduğu sistemde her köye bir şekilde gidilebildiğinden yolların sayısı

$$E_K = V - 1$$

olur. Bu bilgileri bir arada kullandığımızda

$$\begin{aligned} E &= E_K + (F - 1) \\ &= (V - 1) + (F - 1) \\ &= V + F - 2 \\ &\Rightarrow V - E + F = 2 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 0.0.7 *Düzgün beşgen ve düzgün altıgenlerden oluşan futbol topunda kaç tane beşgen ve altıgen olduğunu euler karakteristiği yardımı ile bulalım.*

İspat. Futbol topunda B tane beşgen (siyah alan) ve A tane altıgen (beyaz alan) olsun. Bir beşgende 5 tane altıgende 6 tane nokta olacağından futbol topundaki nokta sayısını ilk olarak $5B + 6A$ olarak düşünebiliriz. Ancak burada kesişimde olan noktaları bir defadan fazla saymış oluruz.

Her bir nokta 3 alana temas ettiğinden $5B + 6A$ toplamında her bir noktayı 3 kez saymış oluruz. Benzer şekilde Her bir kenar iki alana temas ettiğinde $5B + 6A$ kenar toplamında her kenar 2 kez sayılmış olur. Buradan

$$V = \frac{5B + 6A}{3} \qquad E = \frac{5B + 6A}{2}$$

olur. B tane beşgen ve A tane altıgen olduğundan alanların toplamı

$$F = A + B$$

olur. Buradan,

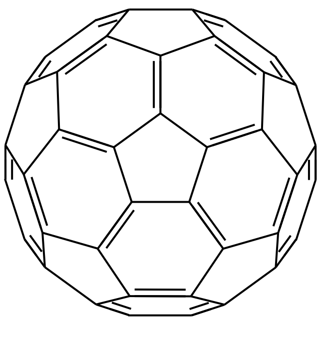
$$\begin{aligned} 2 &= V - E + F \\ &= \frac{5B + 6A}{3} - \frac{5B + 6A}{2} + A + B \\ &= \frac{10B + 12A - 15B - 18A + 6A + 6B}{6} \\ &= \frac{B}{6} \end{aligned}$$

olacağından $B = 12$ bulunur.

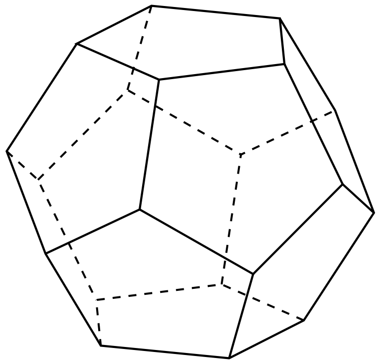
$$V = \frac{5B + 6A}{3}$$

eşitliğinde $V = 60$ ve $B = 12$ için $A = 20$ olur. Sonuç olarak şekildeki gibi düzgün beşgen ve düzgün altıgenlerden oluşan futbol topunda 12 tane beşgen ve 20 tane altıgen vardır. □

Örnek 0.0.8 *Bir C_{60} fulleren molekülü*



bir futbol topu ile aynı sayıda beşgen ve altıgen içermektedir. Sadece beşgenlerden oluşan bir C_{20} molekülü için



kaç tane beşgenden oluştuğu Euler karakteristiği kullanılarak hesaplanabilir.

Bölüm 1

TOPOLOJİK UZAYLAR

Matematikte, "limitler", "süreklilik", "bağlantılılık", "kompaktlık" gibi çoğu önemli kavram, "açık kümeler" kavramıyla açıklanabilir ve analizin birçok önemli teoremi yalnızca açık kümelerin özellikleri kullanılarak kanıtlanabilir. Bu durum, Felix Hausdorff'un (1914) açık kümelerin temel özelliklerini soyutlayarak ve metrik kavramından bağımsız olarak bu kavramlar hakkında uygun bir kavramı tanıtmasına yol açmıştır.

1.1 Topoloji Tanımı ve Örnekler

Tanım 1.1.1 *X boş kümeden farklı bir küme ve τ ailesi $\mathcal{P}(X)$ kuvvet kümesinin bir alt kümesi olmak üzere eğer τ ailesi;*

T_1. $\emptyset, X \in \tau$

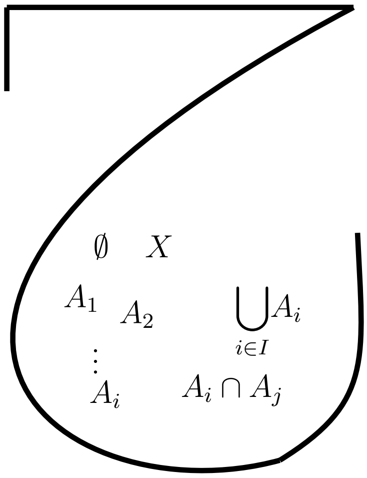
T_2. *τ ailesine ait herhangi sayıda elemanların birleşimi τ ailesine aittir.*

T_3. *τ ailesine ait sonlu sayıda elemanların kesişimi τ ailesine aittir.*

şartları sağlanıyorsa τ ailesine X kümesi üzerinde bir topoloji veya (X, τ) ikilisine ***topolojik uzay*** *denir. τ ailesinin elemanlarına τ topolojisine göre* ***açık küme*** *denir. Yukarıdaki şartlar* ***açıklar aksiyomları*** *olarak bilinir.*

Uyarı 1.1.2 *Sonlu bir I ailesinin arakesit özelliğini göstermek için, bu ailede bulunan iki kümenin arakesitinin bu ailede olduğunu göstermek yeterlidir. Yani, A ve B herhangi iki küme olmak üzere, A ve B kümelerinin arakesiti de bu ailede yer almalıdır.*

Böylece, bu aileden alınacak sonlu sayıda kümenin arakesiti, tümevarım (indüksiyon) yöntemiyle elde edilebilir. Öncelikle, iki kümenin arakesitinin bu ailede olduğunu göstererek başlayabiliriz. Sonra, bu iki küme ile başka bir kümenin arakesitinin de bu ailede olduğunu gösterebiliriz. Bu şekilde devam ederek sonlu sayıda kümenin arakesitinin bu ailede olduğunu kanıtlayabiliriz.



Boştan farklı bir X kümesi üzerindeki τ ailesini;
T_1. Boş küme ve X kümesini içeren,
T_2. I herhangi bir indis ailesi olmak üzere

$$\forall i \in I, \quad A_i \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$$

açık kümelerin herhangi birleşimini içeren,
T_3. $A_i, A_j \in \tau \Rightarrow A_i \cap A_j \in \tau$
açık kümelerin sonlu kesişimini içeren,
bir torba olarak düşünebiliriz.

Üzerinde bir τ topolojik yapısı olan X kümesine topolojik bir uzay denir. X kümesinin elemanları nokta olarak adlandırılır ve τ ailesinin elemanları açık kümeler olarak adlandırılır. Genel olarak, bir topolojik uzay (X, τ) olarak gösterilir. Ancak, her seferinde X kümesi için τ topolojisini belirtmek yerine genellikle "X topolojik uzayı" veya daha kısa bir şekilde "X uzayı" ifadesi kullanılır.

Tanım 1.1.3 *X topolojik uzayında bir $F \subset X$ kümesinin tümleyeni açık küme ise F kümesine X uzayında **kapalı küme** denir.*

De Morgan kuralları kullanılarak herhangi bir topolojik uzayda kapalı kümelerin, **kapalılar aksiyomları** olarak bilinen, aşağıdaki özelliklerini verebiliriz.

Önerme 1.1.4 *X bir topolojik uzay olsun. Bu durumda,*

T_1'. X ve $\emptyset$ kapalı kümelerdir;

T_2'. Sonlu sayıda kapalı kümenin birleşimi kapalı bir kümedir;

T_3'. Kapalı kümelerin herhangi bir ailesinin kesişimi kapalı bir kümedir.

Uyarı 1.1.5 *Boştan farklı bir X kümesi üzerinde τ ailesi T_2 ve T_3 şartlarını sağlandığında, T_2 şartından*

$$\bigcup_{i\in\emptyset} A_i = \emptyset \in \tau$$

ve T_3 şartından

$$\bigcap_{i\in\emptyset} A_i = X \in \tau$$

yazılabileceğinden T_1 şartı elde edilebilir.

Örnek 1.1.6 *$X = \{a, b, c\}$ olmak üzere aşağıda verilen τ ailelerinden hangilerinin X kümesi üzerinde bir topoloji belirttiğini inceleyelim.*

$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

$\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$

$\tau_3 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}\}$

$\tau_4 = \{\emptyset, X, \{a,b\}, \{b,c\}\}$

τ_1 ve τ_2 aileleri açıklar aksiyomlarını sağladığı için X kümesi üzerinde birer topoloji belirtirler.

τ_3 ailesi için $\{a\}, \{c\} \in \tau_3$ ancak

$$\{a\} \cup \{c\} = \{a,c\} \notin \tau_3$$

olduğundan T_2 şartı sağlanmaz. τ_4 ailesi için $\{a,b\}, \{b,c\} \in \tau_4$ ancak

$$\{a,b\} \cap \{b,c\} = \{b\} \notin \tau_4$$

olduğundan T_3 şartı sağlanmaz. Sonuç olarak τ_3 ve τ_4 aileleri X kümesi üzerinde topoloji belirtmez.

Not. Birden fazla eleman içeren bir X kümesi üzerinde birbirinden farklı topolojiler tanımlabilir. Örneğin $X = \{a,b\}$ kümesi üzerinde 4 tane farklı, $X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde 29 tane farklı topoloji tanımlanabilir. n elemanlı bir küme üzerindeki topoloji sayısını bulmak için genelleştirilmiş bir formül bulunmamaktadır.

□

X Kümesinin Eleman Sayısı	1	2	3	4	5	6	$\cdots$	n
X kümesi üzerinde tanımlanabilecek farklı Topoloji sayısı	1	4	29	355	6942	209527		?

Örnek 1.1.7 *X herhangi bir küme olmak üzere için X kümesinin tüm alt kümelerinin ailesi $\mathcal{P}(X)$, X kümesi üzerinde bir topoloji belirtir ve bu topolojiye* ***ayrık topoloji*** *denir; $(X, \mathcal{P}(X))$ çiftine* ***ayrık uzay*** *denir. $\mathcal{I} = \{\emptyset, X\}$ ailesi de X kümesi üzerinde bir topoloji belirtir ve bu topolojiye* ***kaba topoloji*** *ya da* ***ayrık olmayan topoloji*** *denir; $(X, \{\emptyset, X\})$ çiftine* ***kaba uzay*** *ya da* ***ayrık olmayan uzay*** *denir.*

Uyarı 1.1.8 *(X,τ) topolojik uzayında her tek nokta kümesi açık küme ise her küme tek nokta kümelerinin birleşimi olarak yazılabileceğinden açıklar aksiyomunun T_2 şartından her küme açık küme olacağından (X,τ) topolojik uzayı ayrık uzay olur.*

$$(X,\tau) \text{ ayrık uzay} \iff \forall x \in X, \{x\} \in \tau$$

Örnek 1.1.9 *X sonlu bir küme olmak üzere (X,τ) topolojik uzayında tek elemanlı her alt küme kapalı küme oluyorsa (X,τ) uzayı ayrık uzaydır.*

$$X \text{ sonlu } \wedge \ \forall x \in X, \{x\} \in \tau^t \Rightarrow (X,\tau) \text{ ayrık uzay}$$

Çözüm: X sonlu bir küme olduğundan $X = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ şeklinde yazabiliriz. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{a_n\} \in \tau^t$ ve kapalı kümelerin sonlu birleşimi kapalı küme olacağından.

$$\{a_1\}^t = \{a_2, a_3, ..., a_n\} = \{a_2\} \cup \{a_3\} \cup ... \cup \{a_n\} \in \tau^t$$

elde ederiz. $\{a_1\}$ kümesinin tümleyeni kapalı küme olduğundan $\{a_1\}$ kümesi açık küme olur. Benzer şekilde Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{a_n\} \in \tau$ olur. Her tek nokta kümesi açık olduğundan $\tau = \mathcal{P}(X)$ bulunur. □

Örnek 1.1.10 *$X = \{a,b\}$ olmak üzere, ayrık ve kaba topolojilerin yanı sıra X kümesi üzerinde*

$$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$$

ve

$$\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$$

olmak üzere iki farklı topoloji tanımlanabilir. Bu topolojilerden biriyle birlikte (τ_1 veya τ_2) X kümesine ***Sierpinski uzayı*** *denir.*

Uyarı 1.1.11 *Bir X kümesi üzerinde birden fazla topoloji tanımlanması durumunda açık kümeleri karıştırmamak için τ topolojisine ait açık kümeye* ***τ-açık*** *küme denir. Örneğin bir önceki örneğimizde $\{a\}$ kümesi τ_1-açık kümedir ancak τ_2-açık küme değildir. Genelde X kümesi üzerinde sabit bir topolojiden bahsediyorsak (X,τ) topolojik uzayı yerine kısaca X topolojik uzayı ve*

- *X uzayındaki açık kümeler $= \tau$ ailesinin elemanları*
- *X uzayındaki kapalı kümeler $= \tau$ ailesinin elemanlarının tümleyenleri*

olarak bahsedeceğiz.

Bir kümenin kapalı olması, tümleyeninin açık olmasıyla tanımlanır. Kapalı olmayan bir küme açık kümedir veya açık olmayan küme kapalı kümedir şeklinde bir çıkarım yapılması doğru bir yaklaşım değildir. Ayrıca bir küme hem açık hem kapalı küme olabileceği gibi ne açık ne de kapalı küme olabilir. Şimdi bu durumları bir örnek ile açıklayalım.

Örnek 1.1.12 *$X = \{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde*

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}\}$$

ailesi bir topoloji belirtir.

- *$\{a\}$ kümesi τ ailesine ait olduğundan açık kümedir. $\{a\}$ kümesinin tümleyeni $\{b, c, d\}$ kümesi τ ailesinde mevcut olmadığından $\{a\}$ kümesi kapalı küme değildir.*

- *$\{b\}$ kümesi τ ailesinde mevcut olmadığından açık küme değildir. $\{b\}$ kümesinin tümleyeni $\{a, c, d\}$ kümesi τ ailesine aittir. Tümleyeni açık küme olduğundan $\{b\}$ kümesi kapalı kümedir.*

- *$\{a, b\}$ kümesi τ ailesine ait olduğundan açık kümedir. $\{a, b\}$ kümesinin tümleyeni $\{c, d\}$ kümesi τ ailesine ait olduğundan $\{a, b\}$ kümesi kapalı kümedir. Sonuç olarak $\{a, b\}$ kümesi hem açık hem de kapalı kümedir.*

- *$\{b, c\}$ kümesi τ ailesinde mevcut olmadığından açık küme değildir. $\{b, c\}$ kümesinin tümleyeni $\{a, d\}$ kümesi τ ailesinde mevcut olmadığından, $\{b, c\}$ kümesi kapalı küme değildir. Sonuç olarak $\{b, c\}$ kümesi ne açık ne de kapalı kümedir.*

Uyarı 1.1.13

- *Bir (X, τ) topolojik uzayında bütün kapalı alt kümelerden oluşan aile τ^t olmak üzere τ ailesinden τ^t ailesine birebir bir eşleme mümkündür. Yani uzaydaki her açık A kümesine karşılık bir tek $X - A$ kapalı kümesi vardır.*

- *Bir X kümesi üzerinde birden fazla topoloji tanımlanması durumunda kapalı kümeleri karıştırmamak için τ topolojisine göre kapalı olan kümeye τ-**kapalı** küme denir.*

Bir önceki örneğimizi kapalı kümelerin ailesini kullanarak tekrar inceleyelim.

Örnek 1.1.14 *$X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde*

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$$

ailesi bir topoloji belirtir. Açık kümelerin tümleyenleri ile

$$\tau^t = \{\emptyset, X, \{b, c, d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{b, d\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b\}\}$$

ailesini oluşturabiliriz. Bu örnekte, τ ailesindeki elemanlar açık kümeleri, τ^t ailesindeki elemanlar ise kapalı kümeleri ifade eder. Her iki ailede de bulunan kümeler ise hem açık hem de kapalı kümelerdir. Ayrıca, her iki ailede bulunmayan kümeler ise ne açık ne de kapalı kümelerdir.

Örnek 1.1.15 *X birden fazla eleman içeren bir küme olmak üzere $(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık uzayını düşünelim. $A \subset X$ için $A \in \mathcal{P}(X)$ olur. A kümesinin tümleyeni $X - A \subset X$ olduğundan $X - A \in \mathcal{P}(X)$ olur. Tümleyeni açık küme olduğundan A kümesi kapalı küme olur.*

$$(X, \tau) \text{ ayrık uzay } \Leftrightarrow \forall A \subset X, A \in \tau \Leftrightarrow \forall A \subset X, A \in \tau^t$$

Örnek 1.1.16 *$X = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere*

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a, c\}, \{b, d\}\}$$

ailesi X kümesi üzerinde bir topoloji belirtir. Buradan

$$\tau^t = \{X, \emptyset, \{b, d\}, \{a, c\}\}$$

ailesini yazabiliriz. Dikkat edilirse verilen topolojik uzayda her açık küme aynı zamanda kapalı küme olur. Ancak her alt küme açık olmadığından bu uzay ayrık uzay değildir.

Sonuç 1.1.17 *Bir (X, τ) topolojik uzayında her açık küme aynı zamanda kapalı küme olması (X, τ) topolojik uzayının ayrık uzay olmasını gerektirmez.*

Örnek 1.1.18 *$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde, her n doğal sayısı için*

$$E_n = \{n, n+1, n+2, n+3, ...\}$$

olmak üzere

$$\tau_{\mathbb{N}} = \{\emptyset, E_n \subseteq \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\}$$

şeklinde tanımlanan $\tau_{\mathbb{N}}$ ailesi $\mathbb{N}$ üzerinde bir topoloji belirtir.

Çözüm:

T_1. $\emptyset$, $\mathbb{N} \in \tau_{\mathbb{N}}$ olduğunu göstermeliyiz. Tanımdan $\emptyset \in \tau_{\mathbb{N}}$ olduğu açıktır. $n = 1 \in \mathbb{N}$ için $E_1 = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$ olduğundan $E_1 = \mathbb{N} \in \tau_{\mathbb{N}}$ elde edilir.

T_2. I sonlu ya da sonsuz bir indis ailesi olmak üzere $E_i \in \tau_{\mathbb{N}}$ için $\bigcup\limits_{i \in I} E_i \in \tau_{\mathbb{N}}$ olduğunu göstermeliyiz. $\min I = \{k\}$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i \in I} E_i &= E_k \\
&= \{k, k+1, k+2, ...\} \subseteq \mathbb{N} \\
&\Rightarrow \bigcup_{i \in I} E_i \in \tau_{\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

T_3. $E_m, E_n \in \tau_{\mathbb{N}}$ olsun. $E_m \cap E_n \in \tau_{\mathbb{N}}$ olduğunu göstermeliyiz. $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m \neq n$ olsun.

$$m < n \Rightarrow E_m \cap E_n = E_n \in \tau_{\mathbb{N}} \Rightarrow E_m \cap E_n \in \tau_{\mathbb{N}}$$

$$m > n \Rightarrow E_m \cap E_n = E_m \in \tau_{\mathbb{N}} \Rightarrow E_m \cap E_n \in \tau_{\mathbb{N}}$$

elde edilir. Sonuç olarak $(\mathbb{N}, \tau_{\mathbb{N}})$ bir topolojik uzay olur. $\square$

Örnek 1.1.19 *Bir X kümesi üzerinde*

$$\tau_{sonlu} = \{A \subset X : A = \emptyset \text{ ya da } X - A \text{ sonlu}\}$$

ailesi bir topoloji belirtir.

Çözüm: τ_{sonlu} ailesinin açıklar aksiyomlarını sağladığını gösterelim.

T_1. Tanımdan $\emptyset \in \tau_{sonlu}$ olduğu açıktır. $X - X = \emptyset$ olup $\emptyset$ sonlu olduğundan $X \in \tau_{sonlu}$ elde edilir.

T_2. I herhangi bir indis ailesi olmak üzere $A_i \in \tau_{sonlu}$ için $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_{sonlu}$ olduğunu gösterelim. Bir $j \in I$ için $A_j \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ olduğundan

$$\begin{aligned} A_j \subset \bigcup_{i \in I} A_i &\Rightarrow X - \bigcup_{i \in I} A_i \subset X - A_j && \ldots (A \subset B \Rightarrow X - B \subset X - A) \\ &\Rightarrow X - \bigcup_{i \in I} A_i \text{ sonlu} && \ldots (A_j \in \tau_{sonlu} \Rightarrow X - A_j \text{ sonlu}) \\ &\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_{sonlu} \end{aligned}$$

elde edilir.

T_3. $A_1, A_2 \in \tau_{sonlu}$ olsun. $A_1 \cap A_2 \in \tau_{sonlu}$ olduğunu göstermeliyiz. $A_1 \in \tau_{sonlu}$ ve $A_2 \in \tau_{sonlu}$ olduğundan $X - A_1$ ve $X - A_2$ kümeleri sonlu olur. Sonlu iki kümenin birleşimi sonlu olacağından $(X - A_1) \cup (X - A_2)$ kümesi sonlu olur. Ayrıca De Morgan kuralından

$$(X - A_1) \cup (X - A_2) = X - (A_1 \cap A_2)$$

eşitliği yazılabilir. Eşitliğin sol tarafı sonlu olduğunda eşitliğin sağ tarafı da sonlu olacaktır. $X - (A_1 \cap A_2)$ kümesi sonlu olduğundan $A_1 \cap A_2 \in \tau_{sonlu}$ elde ederiz.

$$\begin{aligned} A_1, A_2 \in \tau_{sonlu} &\Rightarrow A_1 \in \tau_{sonlu} \wedge A_2 \in \tau_{sonlu} \\ &\Rightarrow X - A_1 \text{ sonlu} \wedge X - A_2 \text{ sonlu} \\ &\Rightarrow (X - A_1) \cup (X - A_2) \text{ sonlu} \\ &\Rightarrow X - (A_1 \cap A_2) \text{ sonlu} && \ldots (X - A_1) \cup (X - A_2) = X - (A_1 \cap A_2) \\ &\Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau_{sonlu} \end{aligned}$$

Sonuç olarak (X, τ_{sonlu}) bir topolojik uzay olur. □

Tanım 1.1.20 *(X, τ_{sonlu}) topolojik uzayına X kümesi üzerindeki* ***sonlu tümleyen topolojisi*** *denir.*

Tanım 1.1.21 *Bir X kümesi üzerinde*

$$\tau_{sayılabilir} = \{A \subset X : A = \emptyset \text{ ya da } X - A \text{ sayılabilir}\}$$

ailesi bir topoloji belirtir.

Bu topolojiye X kümesi üzerindeki ***sayılabilir tümleyen topolojisi*** *denir.*

Uyarı 1.1.22 *X kümesinin sonlu (sayılabilir) olması durumunda her $A \subset X$ kümesi için $X - A \subset X$ sonlu (sayılabilir) bir küme olacağından X kümesi üzerindeki sonlu (sayılabilir) tümleyen topolojisi uzay ayrık uzay olur.*

Örnek 1.1.23 *$X \neq \emptyset$ ve $a \in X$ olmak üzere*

$$\tau = \{A \subset X : A = \emptyset \text{ ya da } a \in A\}$$

ailesi X kümesi üzerinde bir topoloji belirtir.

Çözüm:

T_1. Tanımdan $\emptyset \in \tau$ olur. Ayrıca $a \in X \subset X$ olduğundan $X \in \tau$ elde edilir.

T_2. I herhangi bir indis ailesi olmak üzere $A_i \in \tau$ alalım. $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \tau$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
\forall i \in I, A_i \in \tau \quad &\Rightarrow \quad \forall i \in I, a \in A_i \\
&\Rightarrow \quad a \in \bigcup_{i \in I} A_i \qquad \ldots \left(\exists\, j \in I, a \in A_i \Rightarrow a \in \bigcup_{i \in I} A_j \right) \\
&\Rightarrow \quad \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau
\end{aligned}$$

T_3. $A, B \in \tau$ olmak üzere $A \cap B \in \tau$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
A, B \in \tau \quad &\Rightarrow \quad a \in A \ \wedge \ a \in B \\
&\Rightarrow \quad a \in A \cap B \\
&\Rightarrow \quad A \cap B \in \tau
\end{aligned}$$

Sonuç olarak (X, τ) bir topolojik uzay olur. □

Teorem 1.1.24 *$X \neq \emptyset$ ve I herhangi bir indis ailesi olmak üzere X kümesi üzerindeki topolojilerin ailesi $(\tau_i)_{i \in I}$ olsun. Bu durumda*

$$\bigcap_{i \in I} \tau_i$$

ailesi X kümesi üzerinde bir topoloji belirtir.

İspat. $\bigcap_{i\in I}\tau_i$ ailesinin açıklar aksiyomunu sağladığını gösterelim.

T_1. Her $i \in I$ için τ_i aileleri X kümesi üzerinde topoloji olduklarından $\emptyset, X \in \tau_i$ olur.

$$\forall i \in I \ \text{ için } \emptyset, X \in \tau_i \implies \emptyset, X \in \bigcap_{i\in I}\tau_i$$

elde edilir.

T_2. J herhangi bir indis ailesi olmak üzere her $j \in J$ için $A_j \in \bigcap_{i\in I}\tau_i$ olsun.

$$\bigcup_{j\in J} Aj \in \bigcap_{i\in I}\tau_i$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
\forall j \in J, A_j \in \bigcap_{i\in I}\tau_i \quad &\Rightarrow \quad \exists\, i \in I, A_j \in \tau_i \\
&\Rightarrow \quad \bigcup_{j\in J} A_j \in \tau_i \qquad\qquad ...\,(\forall i \in I, (X,\tau_i) \text{ topoloji}) \\
&\Rightarrow \quad \bigcup_{j\in J} A_j \in \bigcap_{i\in I}\tau_i \qquad\qquad ...\,(\forall i \in I)
\end{aligned}$$

T_3. $A_1, A_2 \in \bigcap_{i\in I}\tau_i$ alalım. $A_1 \cap A_2 \in \bigcap_{i\in I}\tau_i$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}
A_1, A_2 \in \bigcap_{i\in I}\tau_i \quad &\Rightarrow \quad \forall\, i \in I, \quad A_1 \in \tau_i \ \wedge \ A_2 \in \tau_i \\
&\Rightarrow \quad \forall\, i \in I, A_1 \cap A_2 \in \tau_i \qquad\qquad ...\,(\forall\, i \in I, (X,\tau_i) \text{ topoloji}) \\
&\Rightarrow \quad A_1 \cap A_2 \in \bigcap_{i\in I}\tau_i
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $(X, \bigcap_{i\in I}\tau_i)$ bir topolojik uzay olur. □

Örnek 1.1.25 $X = \{a, b, c, d\}$ *olmak üzere,*

$$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$$
$$\tau_2 = \{\emptyset, X, \{c\}\}$$
$$\tau_1 \cup \tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}\}$$

ailelerini inceleyelim. τ_1 *ve* τ_2 *aileleri* X *kümesi üzerinde birer topolojji belirtirler. Ancak* $\{a\}, \{c\} \in \tau_1 \cup \tau_2$ *için*

$$\{a\} \cup \{c\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$$

olduğundan $\tau_1 \cup \tau_2$ *ailesi* X *kümesi üzerinde bir topoloji belirtmez.*

Sonuç 1.1.26 *Bir X kümesi üzerinde birden fazla topoloji bulunması durumunda, X kümesi üzerindeki topolojilerin herhangi arakesiti yine X kümesi üzerinde bir topoloji belirtir. Ancak bir önceki örnekte gördüğümüz üzere bir X kümesi üzerindeki topolojilerin birleşimi X kümesi üzerinde bir topoloji olmayabilir.*

Teorem 1.1.27 (X, τ) *bir topolojik uzay* $A, K \subset X$ *ve* $A \in \tau$, $K \in \tau^t$ *olsun. Bu durumda,*

i. $A - K$ *kümesi açık kümedir.*

ii. $K - A$ *kümesi kapalı kümedir.*

İspat. *i.* $A, K \subset X$ alt kümeleri için

$$A - K = \overset{\in\tau}{A} \cap \overset{\in\tau}{(X - K)}$$

yazabiliriz. Kapalı bir kümenin tümleyeni açık küme olacağından $K \in \tau^t$ için $X - K \in \tau$ açık küme olur. Açık kümelerin sonlu kesişimi açık olacağından $A \cap (X - K) \in \tau$ olur.

ii. Benzer şekilde

$$K - A = \overset{\in\tau^t}{K} \cap \overset{\in\tau^t}{(X - A)}$$

eşitliğinden $K - A$ kümesi kapalı bir küme olur. □

Tanım 1.1.28 *Bir topolojik uzayda açık kümelerin sayılabilir arakesiti olarak ifade edilebilen kümeye* G_δ***-kümesi*** *denir.*

$$(X, \tau), \;\; A \subset X, \;\; A \text{ kümesi } G_\delta\text{- kümesi} \Leftrightarrow A = \bigcap_{i \in I} B_i \ni \forall i \in I, B_i \in \tau \text{ ve } I \text{ sayılabilir küme}$$

Tanım 1.1.29 *Bir topolojik uzayda kapalı kümelerin sayılabilir birleşimi olarak ifade edilebilen kümeye* F_σ***-kümesi*** *denir.*

$$(X, \tau), \;\; A \subset X, \;\; A \text{ kümesi } F_\sigma\text{- kümesi} \Leftrightarrow A = \bigcup_{i \in I} B_i \ni \forall i \in I, B_i \in \tau^t \text{ ve } I \text{ sayılabilir küme}$$

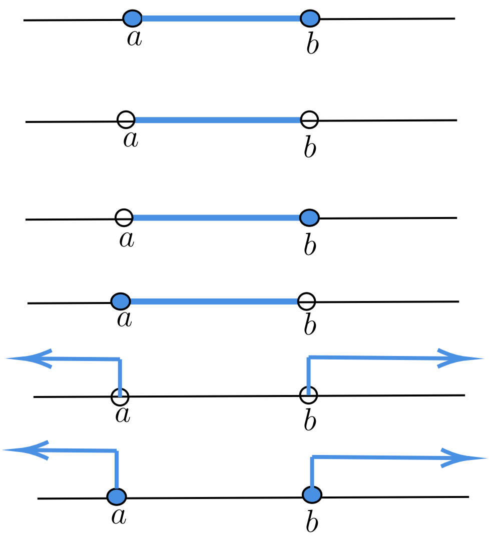
Uyarı 1.1.30 *Bir* G_δ *(*F_σ*) kümesi açık (kapalı) küme olmayabilir.* G_δ *(*F_σ*) kümesinin açık (kapalı) küme olmadığı örnekleri* $\mathbb{R}$ *üzerindediki topolojileri inceledikten sonra vereceğiz.*

1.2 $\mathbb{R}$ Üzerinde Bazı Önemli Topolojiler

Metrik uzayın tanımını vermeden, bu bölümde klasik analizin bazı temel sonuçlarını vereceğiz; bu sonuçlar, metrik uzay kavramının ortaya çıkmasını ve soyut bir ortamda sistematik olarak incelenmesini motive etmiştir. Metrik uzaylarla ilgili çoğu kavram, gerçel sayılar kümesinin, $\mathbb{R}$, geometrik fikirleri üzerinden doğmuştur. Bu nedenle, matematikte, özellikle cebir, geometri ve analizde önemli bir rol oynayan $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesindeki açık kümeleri, kapalı kümeleri ve fonksiyonların sürekliliğini incelemek gerekli hale gelmiştir.

1.2.1 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$, Reel Sayıların Alışılmış Uzayı

Bu bölümde $\mathbb{R}$ üzerindeki alışılmış uzayda açık kümeleri inceleyeceğiz. $\mathbb{R}$ üzerinde "$\leqslant$" bilinen (doğal) bir sıralama olsun. Genellikle $a < b$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{R}$ için $]a, b[$ açık bir aralığı, $[a, b]$ ise kapalı bir aralığı göstereceğiz.



$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$
kapalı aralık

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
açık aralık

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$
soldan açık sağdan kapalı yarı açık

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$
soldan kapalı sağdan açık yarı açık

$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$, $]b, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : b < x\}$
sonsuz açık aralıklar

$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$,$[b, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : b \leqslant x\}$
sonsuz kapalı aralıklar

Tanım 1.2.1 *$\mathbb{R}$ kümesi üzerinde Öklidyen mesafe $d(x, y)$, her $x, y \in \mathbb{R}$ için*

$$(x, y) = |x - y|$$

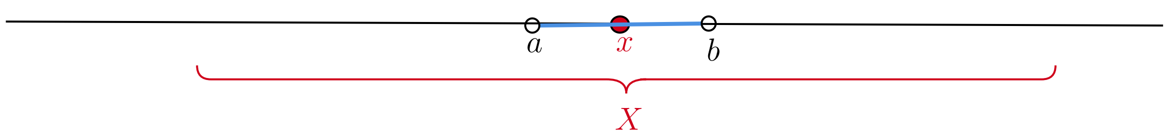
olarak tanımlanır. Burada $|x - y|$ değeri, $x - y$ reel sayısının mutlak değerini gösterir.

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & |x - y| \end{array}$$

fonksiyonuna ***Öklidyen metrik*** *veya* ***standart (alışılmış) metrik*** *denir.*

Tanım 1.2.2 *$\mathbb{R}$ reel sayıların bir X alt kümesinin her $x \in X$ noktası için $x \in]a, b[\subset X$ olacak şekilde $a < b$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{R}$ noktaları varsa, X alt kümesine reel sayıların alışılmış uzayına göre açık küme denir.*

$$X \subset \mathbb{R} \text{ açık küme} \iff \forall x \in X, \exists\ ]a, b[\subset \mathbb{R} \ni x \in]a, b[\subset X$$



Bu tanımı, verilen bir $x \in X$ noktası için x noktasının X kümesi içindeki "nefes alma alanı" olarak düşünebiliriz. Böylece açık bir kümeyi, her noktasının kendi içinde en az bir nefes alma alanına sahip olan bir küme olarak düşünebiliriz.

Teorem 1.2.3 $\mathbb{R}$ *kümesi üzerinde*

$$\mathcal{U} = \{A \subset \mathbb{R} : \ \forall x \in A, x \text{ noktası } A \text{ kümesi içinde nefes alma alanına sahiptir.}\}$$

ailesi bir topoloji belirtir.

İspat. T_1. $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{U}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists]a, b[, \ni x \in]a, b[\subset \mathbb{R}$$

olduğundan $\mathbb{R} \in \mathcal{U}$ olur. Kabul edelim ki $\emptyset \notin \mathcal{U}$ olsun. Buradan

$$\forall x \in \emptyset, \forall]a, b[\subset \mathbb{R}, \ x \in]a, b[\not\subset \emptyset$$

olması $x \in \emptyset$ çelişkisini oluşturur. Bu durumda kabulümüz yanlıştır. $\emptyset \in \mathcal{U}$ olması gerekir.

T_2. I herhangi bir indis ailesi olmak üzere $A_i \in \mathcal{U}$ olsun. $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{U}$ olduğunu göstermeliyiz. Her $i \in I$, $A_i \in \mathcal{U}$ için

$$\begin{aligned}
\forall i \in I, A_i \in \mathcal{U} \quad &\Rightarrow \quad \forall i \in I, x_i \in A_i, \ x \in \,]a_i, b_i[\, \subset A_i \\
&\Rightarrow \quad \forall i \in I, x_i \in A_i, \ x_i \in \,]a_i, b_i[\, \subset A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i \qquad \ldots (A \subset A \cup B) \\
&\Rightarrow \quad \forall i \in I, x_i \in \,]a_i, b_i[\, \subset \bigcup_{i \in I} A_i \\
&\Rightarrow \quad \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{U}
\end{aligned}$$

elde edilir.

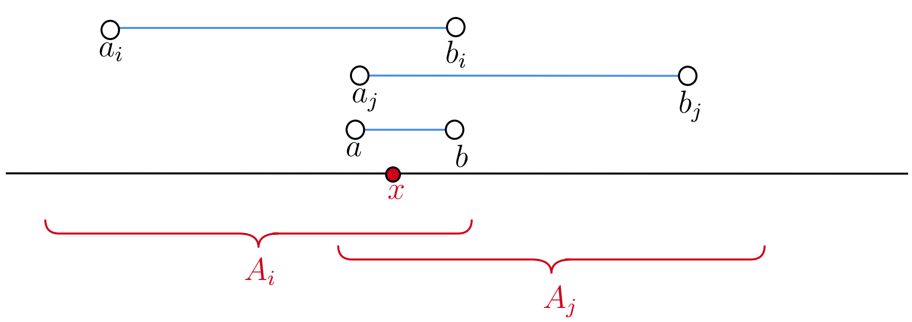
T_3. $A_1, A_2 \in \mathcal{U}$ olmak üzere $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{U}$ olduğunu göstermeliyiz. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ olması durumunda $\emptyset \in \mathcal{U}$ olduğundan $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{U}$ olur. $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ ise $x \in A_1$ ve $x \in A_2$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned}
A_1 \in U \quad &\Rightarrow \quad x \in \,]a_1, b_1[\, \subset A_1 \\
A_2 \in U \quad &\Rightarrow \quad x \in \,]a_2, b_2[\, \subset A_2
\end{aligned}$$

yazabiliriz. $a = maks\{a_1, a_2\}$, $b = min\{b_1, b_2\}$ olsun. Böylece

$$x \in \,]a, b[\, \subset A_1 \cap A_2$$

olur. Sonuç olarak $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{U}$ elde ederiz.



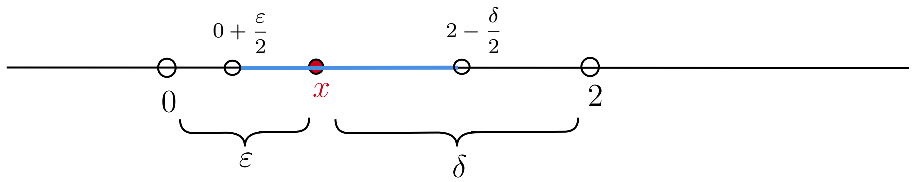
$\square$

Tanım 1.2.4 $\mathbb{R}$ *kümesi üzerinde* $\mathcal{U}$ *ailesine* ***alışılmış (standart) topoloji****,* $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayına reel sayıların* ***alışılmış uzayı*** *denir.*

Örnek 1.2.5 $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında* $]0,2[$ *açık aralığını inceleyelim.* $x\in]0,2[$ *ise* $x\neq 0$ *ve* $x\neq 2$ *olduğundan* $d(0,x)=\varepsilon$ *ve* $d(x,2)=\delta$ *yazabiliriz. Buradan*

$$x\in\left]0+\frac{\varepsilon}{2},2-\frac{\delta}{2}\right[\subset\,]0,2[$$

yazılabileceğinden x *noktası* $]0,2[$ *aralığı içinde nefes alma alanına sahip olur. Her* $x\in]0,2[$ *için bu işlemi tekrarlayabiliriz. Böylece* $]0,2[\in\mathcal{U}$ *olur.*



Sonuç 1.2.6 *Her* $]a,b[\subset\mathbb{R}$ *açık aralığı* $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında açık kümedir.*

Örnek 1.2.7 $A\subset\mathbb{R}$ *kümesi herhangi sayıda açık aralıkların birleşimi ise* A *kümesi* $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında açık küme olur.*

Çözüm: A kümesi herhangi sayıda açık aralıkların birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa I herhangi bir indis ailesi olmak üzere

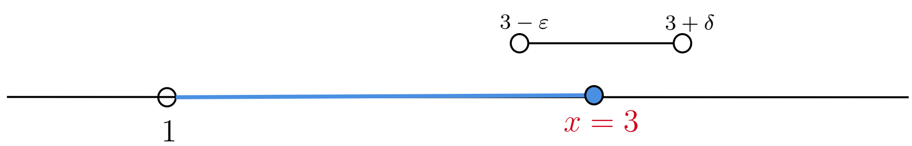
$$A=\bigcup_{i\in I}]a_i,b_i[$$

yazabiliriz. Buradan,

$$\begin{aligned} x\in A &\Rightarrow \exists i\in I, x\in\,]a_i,b_i[\\ &\Rightarrow x\in\,]a_i,b_i[\,\subset A\\ &\Rightarrow A\in\mathcal{U}\end{aligned}$$

elde ederiz. □

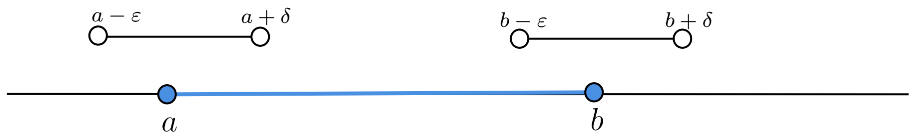
Örnek 1.2.8 $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında* $]1,3]$ *yarı açık aralığını inceleyelim.* $x=3$ *noktası için* $\varepsilon,\delta>0$ *olmak üzere* $x\in]3-\varepsilon,3+\delta[\nsubseteq]1,3]$ *olacağından* $x=3$ *noktası* $]1,3]$ *yarı açık aralığı içinde nefes alma alanına sahip değildir. Dolayısıyla kümeye ait en az bir nokta nefes alma alanına sahip olmadığından* $]1,3]\notin\mathcal{U}$ *olur.*



Sonuç 1.2.9 *$(\mathbb{R},\mathcal{U})$ uzayında ve $]a,b]$ yarı açık aralığı açık küme değildir. Benzer şekilde $[c,d[$ yarı açık aralığı açık küme değildir.*

Sonuç 1.2.10 *$(\mathbb{R},\mathcal{U})$ uzayında ve $[a,b]$ kapalığı aralığı açık küme değildir.*

Çözüm:



$x_1 = a$ ve $x_2 = b$ noktaları için $\varepsilon, \delta > 0$ olmak üzere

$$x_1 = a \in \,]a-\varepsilon, b+\delta[\, \nsubseteq [a,b]$$

ve

$$x_2 = b \in \,]b-\varepsilon, b+\delta[\, \nsubseteq [a,b]$$

olduğundan $x_1 = a$ ve $x_2 = b$ noktaları $[a,b]$ kümesi içinde nefes alma alanına sahip değillerdir. Dolayısıyla

$$[a,b] \notin \mathcal{U}$$

olur. □

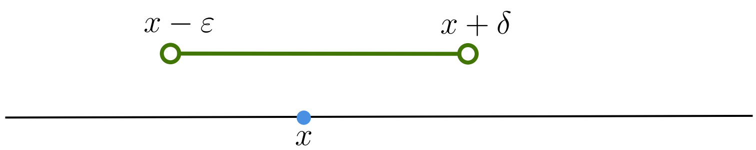
Örnek 1.2.11 *$(\mathbb{R},\mathcal{U})$ uzayında $A = \{x\}$ tek nokta kümesini inceleyelim. $\varepsilon, \delta > 0$ olmak üzere*

$$x \in \,]x-\varepsilon, x+\delta[\, \nsubseteq A = \{x\}$$

olacağından x noktası A kümesi içinde nefes alma alanına sahip değildir. Dolayısıyla

$$A \notin \mathcal{U}$$

olur.



$A = \{x\}$
$U =]x-\varepsilon, x+\delta[\nsubseteq A$

Sonuç 1.2.12 *$(\mathbb{R},\mathcal{U})$ uzayında A kümesi sonlu ise sonlu sayıda tek nokta kümesinin birleşimi şeklinde yazılabileceğinden A kümesi $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ uzayında açık küme değildir.*

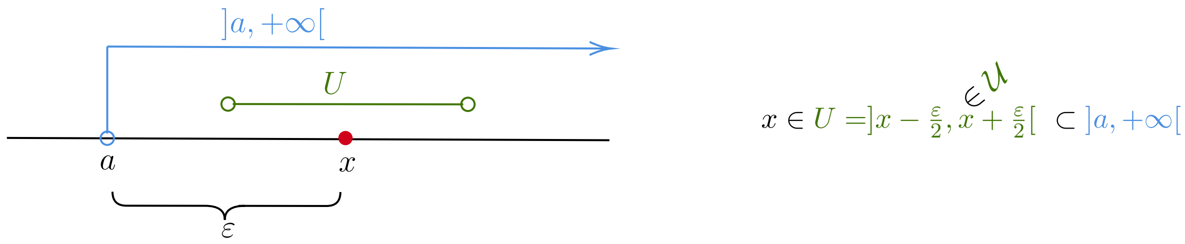
Örnek 1.2.13 *$(\mathbb{R},\mathcal{U})$ uzayında $]a,+\infty[$ sonsuz açık aralığını inceleyelim. $x \in]a,+\infty[$ ise $a \neq x$ olacağından $d(a,x) = \varepsilon$ yazabiliriz. Buradan*

$$U = \left] x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2} \right[\in \mathcal{U}$$

açık kümesi için

$$x \in \left] x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2} \right[\subset \,]a, +\infty[$$

olduğundan x *noktası* $]a, +\infty[$ *sonsuz aralığı içinde nefes alma alanına sahip olur. Her* $x \in]a, +\infty[$ *için sağlanacağından* $]a, +\infty[\in \mathcal{U}$ *olur.*



Sonuç 1.2.14 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında* $]a, +\infty[$ *sonsuz aralığı açık küme olur.*

Örnek 1.2.15 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında* $]-\infty, b\,[$ *sonsuz aralığı açık küme olur.* ✎

Örnek 1.2.16 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında* $]-\infty, a]$ *sonsuz kapalı aralığını inceleyelim.* $x = a$ *noktası için* $\varepsilon > 0$ *olmak üzere*

$$x \in]-\infty, x + \varepsilon[\, \nsubseteq \,]-\infty, a]$$

olacağından $x = a$ *noktası* $]-\infty, a]$ *sonsuz kapalı aralığı içinde nefes alma alanına sahip değildir. Dolayısıyla* $]-\infty, a] \notin \mathcal{U}$ *olur. Ayrıca*

$$]-\infty, a]^t =]a, +\infty[\in \mathcal{U}$$

olduğundan tümleyeni açık küme olduğundan $]-\infty, a]$ *sonsuz kapalı aralığı reel sayıların alışılmış uzayında kapalı küme olur.*

Sonuç 1.2.17 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında* $]-\infty, a]$ *sonsuz kapalı aralığı açık küme değildir.* $]-\infty, a]$ *sonsuz kapalı aralığı reel sayıların alışılmış uzayında kapalı küme olur.*

Örnek 1.2.18 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında* $[b, +\infty[$ *sonsuz kapalı aralığı kapalı küme olur.* ✎

Örnek 1.2.19 $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında* $[a,b]$ *kapalı aralığı için*

$$[a,b]^t =]-\infty, a[\cup]b,+\infty[$$

yazabiliriz. $]-\infty,a[,]b,+\infty[\in \mathcal{U}$ *olduğundan açıklar aksiyomu* T_2 *gereği*

$$]-\infty,a[\cup]b,+\infty[\in \mathcal{U}$$

elde ederiz. Eşitliğin sağ tarafı açık küme olduğundan eşitliğin sol tarafı $[a,b]^t$ *kümeside açık küme olur.* $[a,b]$ *kapalı aralığının tümleyeni açık küme olduğundan* $[a,b]$ *kapalı aralığı reel sayıların alışılmış uzayında kapalı küme olur.*

Örnek 1.2.20 $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında* $a \in \mathbb{R}$ *olmak üzere* $\mathbb{R} - \{a\}$ *kümesini inceleyelim.* $\mathbb{R} - \{a\}$ *kümesini*

$$\mathbb{R} - \{a\} =]-\infty, a[\cup]a,+\infty[$$

şeklinde yazabiliriz. $]-\infty,a[,]a,+\infty[\in \mathcal{U}$ *olduğundan açıklar aksiyomu* T_2 *gereği*

$$]-\infty,a[\cup]a,+\infty[\in \mathcal{U}$$

elde ederiz. Eşitliğin sağ tarafı açık küme olduğundan eşitliğin sol tarafı $\mathbb{R} - \{a\}$ *kümeside açık küme olur.* $\{a\}$ *tek nokta kümesinin tümleyeni açık küme olduğundan* $\{a\}$ *tek nokta kümesi reel sayıların alışılmış uzayında kapalı küme olur.*

$$\mathbb{R} - \{a\} \in \mathcal{U} \Rightarrow \{a\} \in \mathcal{U}^t$$

Sonuç 1.2.21 $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında her tek nokta kümesi kapalıdır.*

Örnek 1.2.22 $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında* $A \subset \mathbb{R}$ *alt kümesi sonlu olsun.* A *kümesi sonlu olduğundan*

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup, \ldots, \cup \{a_n\}$$

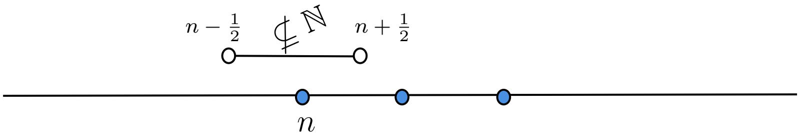
yazabiliriz. $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında her tek nokta kümesi kapalı küme ve kapalı kümelerin sonlu birleşimi kapalı küme olacağından eşitliğin sağ tarafı kapalı küme olur. Eşitliğin sağ tarafı kapalı küme olduğundan eşitliğin sol tarafı* A *kümeside kapalı küme olur. Bu durumu matematiksel olarak ifade edelim.*

$$\begin{aligned}
A \text{ sonlu} &\Rightarrow A = \{a_1, a_2, , , a_n\} \\
&\Rightarrow A = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup, \ldots, \cup \{a_n\} \\
&\Rightarrow \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup, \ldots, \cup \{a_n\} \in \mathcal{U}^t \qquad \ldots (x \in \mathbb{R}, \{x\} \in \mathcal{U}^t) \\
&\Rightarrow A \in \mathcal{U}^t
\end{aligned}$$

Örnek 1.2.23 $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında* $\mathbb{N}$ *doğal sayılar kümesinin açık veya kapalı küme olup olmadığını inceleyelim.*

Çözüm:

$n \in \mathbb{N}$ için $n \in \left]n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right[\nsubseteq \mathbb{N}$ yazabiliriz. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin hiçbir bir noktası nefes alma alanına sahip değildir. Dolayısıyla $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ uzayında açık küme olmaz.



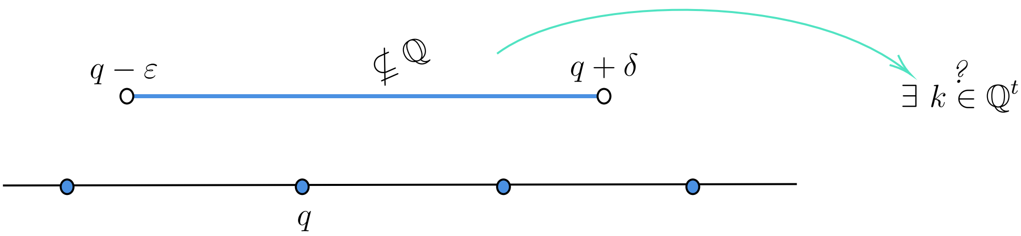
$\mathbb{R}-\mathbb{N}$ kümesini

$$\mathbb{R}-\mathbb{N} = \overset{\in\mathcal{U}}{]-\infty,1[} \bigcup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\in\mathcal{U}}{]n-1,n+1[}\right)$$

olarak yazabiliriz. $]-\infty,1[\in \mathcal{U}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $]n-1,n+1[\in \mathcal{U}$ olur. Açıklar aksiyomu T_2 gereği açık kümelerin herhangi birleşimi açık küme olacağından $\mathbb{R}-\mathbb{N} \in \mathcal{U}$ olur. Tümleyeni açık küme olduğundan $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ uzayında kapalı küme olur. $\square$

Örnek 1.2.24 $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında* $\mathbb{Z}$ *kümesi açık küme değildir.* $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında* $\mathbb{Z}$ *kümesi kapalı küme olur.* ✎

Örnek 1.2.25 $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında* $\mathbb{Q}$ *rasyonel sayılar kümesini inceleyelim.* $q \in \mathbb{Q}$ *elemanı için* $\varepsilon, \delta > 0$ *olmak üzere* q *noktasını içeren* $]q-\varepsilon, q+\delta[\in \mathcal{U}$ *açık kümesi en az bir irrasyonel sayı içerdiğinden* $]q-\varepsilon, q+\delta[\nsubseteq \mathbb{Q}$ *elde ederiz.*



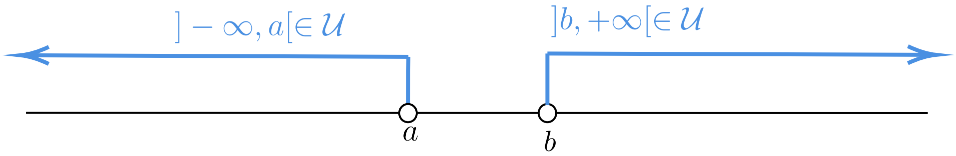
$q-\frac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{Q}^t$ *ise* $]q-\varepsilon, q+\delta[$ *aralığında aradığımız* k *irrasyonel sayısı* $q-\frac{\varepsilon}{2}$ *olur.* $q-\frac{\varepsilon}{2} \notin \mathbb{Q}^t$ *ise iki rasyonel sayı verildiğinde, bu sayılar birbirine ne kadar yakın olursa olsun aralarında bir irrasyonel sayı olacağından* $]q-\frac{\varepsilon}{2}, q[$ *aralığında en az bir irrasyonel* k *sayısı bulunur.*

$\mathbb{Q}$ *rasyonel sayılar kümesinin hiçbir bir noktası nefes alma alanına sahip değildir. Dolayısıyla* $\mathbb{Q}$ *rasyonel sayılar kümesi* $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında açık küme olmaz.*

Örnek 1.2.26 $\mathbb{Q}^t$ *irrasyonel sayılar kümesinin hiçbir bir noktası nefes alma alanına sahip değildir. Dolayısıyla* $\mathbb{Q}^t$ *irrasyonel sayılar kümesi* $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında açık küme olmaz.* ✎

Sonuç 1.2.27 $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında* $\mathbb{Q}$ *rasyonel sayılar kümesi ve* $\mathbb{Q}^t$ *irrasyonel sayılar kümesi ne açık ne de kapalı kümelerdir.*

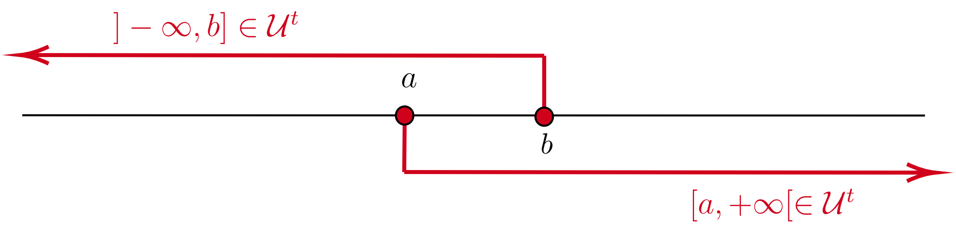
Örnek 1.2.28 $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında* $]-\infty,a[,\ ]a,+\infty[$ *sonsuz açık aralıkları*



reel sayıların alışılmış uzayında açık kümeler olduklarından tümleyenleri

$$\mathbb{R}-]-\infty,a[=[b,+\infty[\ \ \mathbb{R}-]b,+\infty[=]-\infty,b]$$

sonsuz kapalı aralıkları,



$(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında kapalı kümeler olur.*

$$]-\infty,a[\ ,\ ]b,+\infty[\in\mathcal{U}\Rightarrow[a,+\infty[,\ ]-\infty,b]\in\mathcal{U}^t$$

Not. $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ uzayında açık ve kapalı kümeleri tablo ile özetleyelim.

	Açık Küme	Kapalı Küme
$(\mathbb{R},\mathcal{U})$	$\emptyset,\ \mathbb{R},\ ]a,b[\ ,\ ]a,+\infty[,\quad]-\infty,b[$ $\bigcup\limits_{i\in I}A_i,\ \ni\forall i\in I,\ A_i\in\mathcal{U}$ Açık kümelerin herhangi birleşimi	$\emptyset,\ \mathbb{R},\ [a,b]\ ,\ [a,+\infty[,\quad]-\infty,b]$ $\bigcup\limits_{i=1}^{n}F_i,\ \ni\forall i\in I,\ F_i\in\mathcal{U}^t$ Kapalı kümelerin sonlu birleşimi

$(\mathbb{R},\mathcal{U})$ uzayında hem açık hem de kapalı kümeleri $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ kümeleridir. $[a,b[,]c,d]$ yarı açık aralıkları $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi, $\mathbb{Q}^t$ irrasyonel sayılar kümesi reel sayıların alışılmış uzayında ne açık nede kapalı kümelerdir. □

Hatırlatma 1.2.29 (X,τ) *topolojik uzay ve* $A\subset X$ *olmak üzere eğer* A *kümesi açık (kapalı) kümelerin sayılabilir birleşimi olarak ifade edilebiliyorsa* A *kümesine bir* G_δ (F_σ) *kümesidir denir.*

Örnek 1.2.30 $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında*

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right[$$

kümesini inceleyelim. A kümesi sayılabilir sayıda açık kümenin arakesiti olduğundan A kümesi bir G_δ kümesidir. Ayrıca

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right[= \{1\} \notin \mathcal{U}$$

olduğundan açık kümelerin herhangi arakesiti açık küme olmayabilir.

Sonuç 1.2.31 *G_δ kümesi açık küme olmayabilir.*

Örnek 1.2.32 $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında*

$$F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}-\{1\}} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$$

kümesini inceleyelim. F kümesi sayılabilir sayıda kapalı kümenin birleşimi olduğundan F kümesi bir F_σ kümesidir. Ayrıca

$$\begin{aligned} F &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}-\{1\}} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] \\ &= F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup ... \\ &= \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \cup ... \\ &=]0,1[\notin \mathcal{U}^t \end{aligned}$$

olduğundan kapalı kümelerin herhangi birleşimi kapalı küme olmayabilir.

Sonuç 1.2.33 *F_σ kümesi kapalı küme olmayabilir.*

1.2.2 $(\mathbb{R}, \mathfrak{D}^{\rightarrow})$ Sağ Işın ve $(\mathbb{R}, {}^{\leftarrow}\mathfrak{D})$ Sol Işın Uzayları

Teorem 1.2.34 $\mathbb{R}$ *üzerinde*

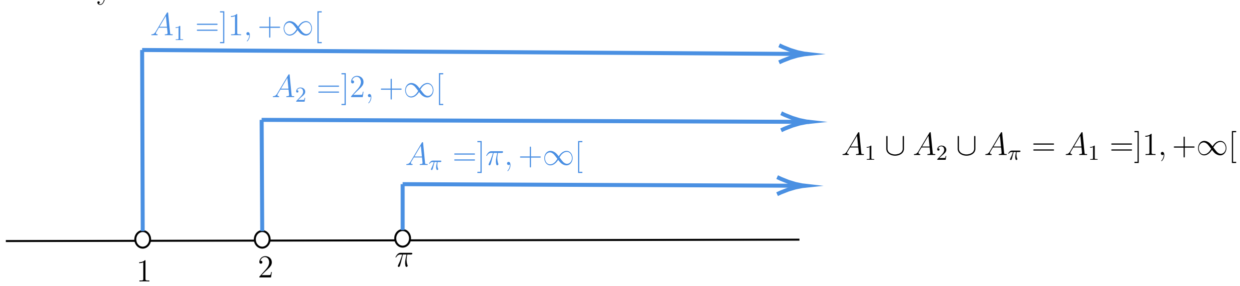
$$\mathfrak{D}^{\rightarrow} = \{A_\lambda =]\lambda, +\infty[: \lambda \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

ailesi bir topoloji belirtir.

İspat. $\mathfrak{D}^{\rightarrow}$ ailesinin açıklar aksiyomlarını sağladığını gösterelim.

T_1. Tanımdan $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathfrak{D}^{\rightarrow}$ olduğu açıktır.

T_2. I herhangi bir indis ailesi olmak üzere $A_i \in \mathfrak{D}^{\rightarrow}$ olsun. $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathfrak{D}^{\rightarrow}$ olduğunu göstermeliyiz.



$inf(I) = \{k\}$ olsun. $\bigcup_{i\in I} A_i = A_k =]k, +\infty[\in \mathfrak{D}^{\rightarrow}$ olduğundan $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathfrak{D}^{\rightarrow}$ olur.

T_3. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olmak üzere $A_{\lambda_1}, A_{\lambda_2} \in \mathfrak{D}^{\rightarrow}$ olsun. $A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2} \in \mathfrak{D}^{\rightarrow}$ olduğunu gösterelim.

$$\lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2} = A_{\lambda_1} \in \mathfrak{D}^{\rightarrow}$$

$$\lambda_1 > \lambda_2 \Rightarrow A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2} = A_{\lambda_2} \in \mathfrak{D}^{\rightarrow}$$

olacağından $A_{\lambda_1} \cap A_{\lambda_2} \in \mathfrak{D}^{\rightarrow}$ elde edilir. □

Tanım 1.2.35 *$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde $\mathfrak{D}^{\rightarrow}$ ailesine sağ ışın topolojisi, $(\mathbb{R}, \mathfrak{D}^{\rightarrow})$ uzayına **sağ ışın uzayı** denir.*

Tanım 1.2.36 *$\mathbb{R}$ üzerinde*

$$^{\leftarrow}\mathfrak{D} = \{A_\lambda =]-\infty, \lambda[: \lambda \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

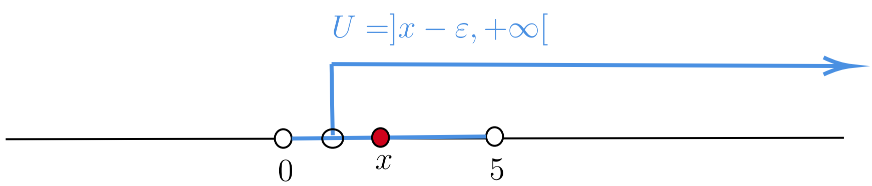
ailesi bir topoloji belirtir. ✎

*$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde $^{\leftarrow}\mathfrak{D}$ ailesine sol ışın topolojisi, $(\mathbb{R}, ^{\leftarrow}\mathfrak{D})$ uzayına **sol ışın uzayı** denir.*

Örnek 1.2.37 *$(\mathbb{R}, \mathfrak{D}^{\rightarrow})$ uzayında $]0,5[\subset \mathbb{R}$ kümesinin açık küme olup olmadığını inceleyelim. Açık küme olması için her $x \in]0,5[$ noktası için $x \in U \subset]0,5[$ olacak şekilde bir $U \in \mathfrak{D}^{\rightarrow}$ açık kümesi olduğunu göstermeliyiz. U kümesi $\mathfrak{D}^{\rightarrow}$ ailesine ait ise en az bir $a \in \mathbb{R}$ için*

$$U =]a, +\infty[$$

olmalıdır. Ayrıca $x \in U$ olacağından $a < x$ olmalıdır. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $U =]x-\varepsilon, +\infty[$ açık kümesi için



$U \not\subseteq]0,5[$ olduğundan $]0,5[$ kümesi $(\mathbb{R}, \mathfrak{D}^{\rightarrow})$ uzayında açık küme değildir.

Uyarı 1.2.38 $]0,5[$ *kümesi* $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında açık kümedir. Ancak* $]0,5[$ *kümesi* $(\mathbb{R},\mathfrak{D}^{\rightarrow})$ *uzayında açık küme değildir. Bir kümenin açık küme olup olmaması kümenin bulunduğu uzayın üzerinde tanımlanan topolojiye bağlıdır.*

Sonuç 1.2.39 $(\mathbb{R},\mathfrak{D}^{\rightarrow})$ *uzayında boş kümeden farklı bir kümenin açık küme olması için gerek ve yeter şart kümenin soldan açık sonsuz bir aralık olmasıdır.*

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R},\ A \in \mathfrak{D}^{\rightarrow} \iff A =]\lambda, +\infty[,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Sonuç 1.2.40 *Tümleyeni açık olan küme kapalı küme olacağından* $(\mathbb{R},\mathfrak{D}^{\rightarrow})$ *uzayında boş kümeden farklı bir kümenin kapalı küme olması için gerek ve yeter şart kümenin tümleyenin soldan açık sonsuz bir aralık olmasıdır.*

$$\begin{aligned}\emptyset \neq F \subset \mathbb{R},\ F \in (\mathfrak{D}^{\rightarrow})^t &\iff F^t =]\lambda, +\infty[, \quad \lambda \in \mathbb{R}\\ &\iff F =]-\infty, \lambda], \quad \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Sonuç 1.2.41 $(\mathbb{R},{}^{\leftarrow}\mathfrak{D})$ *uzayında boş kümeden farklı bir kümenin açık küme olması için gerek ve yeter şart kümenin sağdan açık sonsuz bir aralık olmasıdır.*

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R},\ A \in {}^{\leftarrow}\mathfrak{D} \iff A =]-\infty, \lambda[,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Sonuç 1.2.42 *Tümleyeni açık olan küme kapalı küme olacağından* $(\mathbb{R},{}^{\leftarrow}\mathfrak{D})$ *uzayında boş kümeden farklı bir kümenin kapalı küme olması için gerek ve yeter şart kümenin tümleyenin sağdan açık sonsuz bir aralık olmasıdır.*

$$\begin{aligned}\emptyset \neq F \subset \mathbb{R},\ F \in ({}^{\leftarrow}\mathfrak{D})^t &\iff F^t =]-\infty, \lambda[, \quad \lambda \in \mathbb{R}\\ &\iff F = [\lambda, +\infty], \quad \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Not. $(\mathbb{R},\mathfrak{D}^{\rightarrow})$ ve $(\mathbb{R},{}^{\leftarrow}\mathfrak{D})$ uzaylarında açık ve kapalı kümeleri tablo ile özetleyelim.

	Açık kümeler	Kapalı Kümeler
$(\mathbb{R},\mathcal{D}^{\rightarrow})$	$\emptyset$, $\mathbb{R}$, $]\lambda,+\infty[$	$\emptyset$, $\mathbb{R}$, $]-\infty,\lambda]$
$(\mathbb{R},{}^{\leftarrow}\mathcal{D})$	$\emptyset$, $\mathbb{R}$, $]-\infty,\lambda[$	$\emptyset$, $\mathbb{R}$, $[\lambda,+\infty[$

□

1.3 Topolojilerin Karşılaştırılması

Tanım 1.3.1 *Bir X kümesi üzerinde τ_1 ve τ_2 topolojileri verilsin. Eğer τ_1 topolojisine göre açık olan her küme τ_2 topolojisine göre de açık küme oluyorsa τ_1 topolojisine τ_2 topolojisinden* ***daha kaba*** *veya τ_2 topolojisine τ_1 topolojisinden* ***daha ince*** *denir ve*

$$\tau_1 \subset \tau_2$$

ile gösterilir.

Tanım 1.3.2 *Bir X kümesi üzerinde τ_1 ve τ_2 topolojileri verilsin. Eğer*

$$\tau_1 \subset \tau_2 \text{ veya } \tau_2 \subset \tau_1$$

ise τ_1 ve τ_2 ailelerine karşılaştırılabilir topolojiler denir. Eğer τ_1 ve τ_2 aileleri karşılaştırılabilir topolojiler değil ise τ_1 ve τ_2 topolojileri karşılaştırılamaz denir.
Not. *Eğer τ_1 ve τ_2 aileleri karşılaştırılabilir değil ise*

$$\tau_1 \not\leftrightarrow \tau_2$$

ile göstereceğiz. □

Örnek 1.3.3 $X = \{1, 2, 3\}$ *ve* $Y = \{a, b\}$ *kümeleri üzerinde*

$$\tau_X = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1, 2\}\}$$

ve

$$\tau_Y = \{\emptyset, Y, \{a\}, \{b\}\}$$

aileleri birer topolojidir. $X \in \tau_X$, $X \notin \tau_Y$ ve $Y \in \tau_Y$, $Y \notin \tau_X$ olduğundan τ_X ve τ_Y aileleri karşılaştırılamaz.

Uyarı 1.3.4 *Aynı küme üzerinde olmayan topolojiler karşılaştırılamaz.*

Örnek 1.3.5 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ *kümesi üzerinde*

$$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1, 2\}\}$$

ve

$$\tau_2 = \{\emptyset, X, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

aileleri verilsin. $\{1\} \in \tau_1$ için $\{1\} \notin \tau_2$ ve $\{3\} \in \tau_2$ için $\{3\} \notin \tau_1$ olduğundan τ_1 ve τ_2 topolojileri karşılaştırılamaz.

$$\tau_1 \not\leftrightarrow \tau_2$$

Sonuç 1.3.6 *X kümesi üzerinde iki farklı topoloji için, bir topolojinin daha fazla açık kümeye sahip olması, o topolojinin daha ince olduğu anlamına gelmez.*

Uyarı 1.3.7 *Bir X kümesi üzerinde iki farklı topoloji her zaman karşılaştırılabilir olmayabilir.*

Örnek 1.3.8 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ *kümesi üzerinde*

$$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1, 2\}\}$$

$$\tau_2 = \{\emptyset, X, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$$

$$\tau_3 = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

aileleri birer topoloji belirtir. X kümesi üzerinde τ_1, τ_2 ve τ_3 topolojilerinin karşılaştırabilir olup olmadıklarını inceleyelim.

Çözüm: $\{1\} \in \tau_1$ için $\{1\} \notin \tau_2$ ve $\{2\} \in \tau_2$ için $\{2\} \notin \tau_1$ olduğundan τ_1 ve τ_2 topolojileri karşılaştırılamaz.

$$\tau_1 \nleftrightarrow \tau_2$$

Her $A \in \tau_1$ için $A \in \tau_3$ ve $\{2\} \in \tau_3$ için $\{2\} \notin \tau_1$ olduğundan

$$\tau_1 \subset \tau_3 \text{ ve } \tau_3 \not\subset \tau_1$$

olur. Her $B \in \tau_2$ için $B \in \tau_3$ ve $\{1\} \in \tau_3$ için $\{1\} \notin \tau_2$ olduğundan

$$\tau_2 \subset \tau_3 \text{ ve } \tau_3 \not\subset \tau_2$$

olur. X kümesi üzerindeki τ_1, τ_2 ve τ_3 topolojileri arasındaki ilişkiyi

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau_1) \arrow[rr, leftrightarrow, "/" description] & & (X,\tau_2) \\
& (X,\tau_3) \arrow[ul, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[ur, phantom, sloped, "\supset"] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı ile verebiliriz. □

Örnek 1.3.9 *Bir X kümesi üzerinde; (X, τ) herhangi bir topoloji, $(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık topoloji ve $(X, \{\emptyset, X\})$ ayrık olmayan topoloji olmak üzere her $A \in \tau$ için $A \subset \mathcal{P}(X)$ olduğundan $A \in \mathcal{P}(X)$ elde ederiz. Sonuç olarak bir X kümesi üzerindeki herhangi bir topoloji ayrık topolojiden daha kabadır.*

Diğer taraftan $\emptyset, X \in (X, \{\emptyset, X\})$ için (X, τ) bir topoloji olduğundan $\emptyset, X \in \tau$ olur. Sonuç olarak bir X kümesi üzerindeki herhangi bir topoloji ayrık olmayan topolojiden daha incedir.

$$\{\emptyset, X\} \subset \tau \subset \mathcal{P}(X)$$

Örnek 1.3.10 $\mathbb{R}$ *reel sayılar kümesi üzerinde τ_{sonlu} sonlu tümleyen ve $\tau_{sayılabilir}$ sayılabilir tümleyen topolojilerinin karşılaştırabilir olup olmadıklarını inceleyelim.*

Çözüm: $A \in \tau_{sonlu}$ alalım.

$$\begin{aligned} A \in \tau_{sonlu} &\Rightarrow \mathbb{R} - A \ \text{ sonlu} \\ &\Rightarrow \mathbb{R} - A \ \text{ sayılabilir} \qquad \text{...(sonlu her küme sayılabilir)} \\ &\Rightarrow A \in \tau_{sayılabilir} \end{aligned}$$

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde sonlu tümleyen topolojisine göre açık olan her küme sayılabilir tümleyen topolojisine göre de açık küme olduğundan

$$(\mathbb{R}, \tau_{sonlu}) \subset (\mathbb{R}, \tau_{sayılabilir})$$

elde ederiz. Diğer taraftan $B = \mathbb{R} - \mathbb{N}$ kümesi için $B^t = \mathbb{N}$ sayılabilir ancak sonlu olmayan bir küme olduğundan $B \in \tau_{sayılabilir}$ ve $B \notin \tau_{sonlu}$ olur. Sonuç olarak $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde sayılabilir tümleyen topolojisi sonlu tümleyen topolojisine göre daha kaba değildir.

$$(\mathbb{R}, \tau_{sayılabilir}) \not\subseteq (\mathbb{R}, \tau_{sonlu})$$

$\square$

Örnek 1.3.11 $\mathbb{R}$ *reel sayılar kümesi üzerinde* τ_{sonlu} *sonlu tümleyen ve* $\mathcal{U}$ *alışılmış topolojilerinin karşılaştırabilir olup olmadıklarını inceleyelim.*

Çözüm: $A \in \tau_{sonlu}$ alalım.

$$\begin{aligned} A \in \tau_{sonlu} &\Rightarrow \mathbb{R} - A \ \text{ sonlu} \\ &\Rightarrow \mathbb{R} - A \in \mathcal{U}^t \qquad \text{...((}\mathbb{R},\mathcal{U}\text{) sonlu her küme kapalı)} \\ &\Rightarrow A \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde sonlu tümleyen topolojisine göre açık olan her küme $\mathcal{U}$ alışılmış topolojisine göre de açık küme olduğundan

$$(\mathbb{R}, \tau_{sonlu}) \subset (\mathbb{R}, \mathcal{U})$$

elde ederiz. Diğer taraftan $B =]0, 2[$ kümesi için $B \in \mathcal{U}$ ve $B^t =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$ kümesi sonlu olmadığından $B \notin \tau_{sonlu}$ olur. Sonuç olarak $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde $\mathcal{U}$ alışılmış topolojisi τ_{sonlu} sonlu tümleyen topolojisine göre daha kaba değildir.

$$(\mathbb{R}, \mathcal{U}) \not\subseteq (\mathbb{R}, \tau_{sonlu})$$

$\square$

Örnek 1.3.12 $\mathbb{R}$ *reel sayılar kümesi üzerinde* $\tau_{sayılabilir}$ *sayılabilir tümleyen ve* $\mathcal{U}$ *alışılmış topolojilerinin karşılaştırabilir olup olmadıklarını inceleyelim.*

Çözüm: $A = \mathbb{Q}^t$ kümesi için A kümesinin tümleyeni $A^t = \mathbb{Q}$ sayılabilir bir küme olduğundan $A \in \tau_{sayılabilir}$ olur. Ayrıca $A = \mathbb{Q}^t \notin \mathcal{U}$ (örnek 1.2.25) olduğundan $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde $\tau_{sayılabilir}$ sayılabilir tümleyen topolojisi $\mathcal{U}$ alışılmış topolojisine göre daha kaba değildir.

$$(\mathbb{R}, \tau_{sayılabilir}) \nsubseteq (\mathbb{R}, \mathcal{U})$$

$B =]0,2[$ kümesi için $B \in \mathcal{U}$ ve $B^t =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$ kümesi sayılabilir olmadığından $B \notin \tau_{sayılabilir}$ olur. Buradan $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde $\mathcal{U}$ alışılmış topolojisi $\tau_{sayılabilir}$ sayılabilir tümleyen topolojisine göre daha kaba değildir.

$$(\mathbb{R}, \mathcal{U}) \nsubseteq (\mathbb{R}, \tau_{sayılabilir})$$

Sonuç olarak $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde $\tau_{sayılabilir}$ ve $\mathcal{U}$ topolojileri karşılaştırılamaz.

$$\mathcal{U} \nleftrightarrow \tau_{sayılabilir}$$

□

Sonuç 1.3.13 $\mathbb{R}$ *kümesi üzerinde ayrık uzay, ayrık olmayan uzay, alışılmış uzay, sonlu tümleyenler uzayı ve sayılabilir tümleyen uzayı arasındaki ilişkiyi aşağıdaki diyagram ile verebiliriz.*

$$\begin{tikzcd}
 & & (\mathbb{R},\mathcal{U}) \arrow[dd, leftrightarrow, "/" description] \arrow[dr, phantom, "\subset" sloped] & \\
(\mathbb{R},\{\emptyset,\mathbb{R}\}) \arrow[r, phantom, "\subset"] & (\mathbb{R},\tau_{sonlu}) \arrow[ur, phantom, "\subset" sloped] \arrow[dr, phantom, "\subset" sloped] & & (\mathbb{R},\mathcal{P}(\mathbb{R})) \\
 & & (\mathbb{R},\tau_{sayılabilir}) \arrow[ur, phantom, "\subset" sloped] &
\end{tikzcd}$$

Örnek 1.3.14 $\mathbb{R}$ *reel sayılar kümesi üzerinde* $\mathfrak{D}^{\rightarrow}$ *sağ ışın,* ${}^{\leftarrow}\mathfrak{D}$ *sol ışın ve* $\mathcal{U}$ *alışılmış topolojilerinin karşılaştırabilir olup olmadıklarını inceleyelim.*

Çözüm: $]1, +\infty[\in \mathfrak{D}^{\rightarrow}$ için $]1, +\infty[\notin {}^{\leftarrow}\mathfrak{D}$ ve $]-\infty, 1[\in {}^{\leftarrow}\mathfrak{D}$ için $]-\infty, 1[\notin \mathfrak{D}^{\rightarrow}$ olduğundan $\mathfrak{D}^{\rightarrow}$ sağ ışın, ${}^{\leftarrow}\mathfrak{D}$ sol ışın topolojileri karşılaştırılamaz.

$${}^{\leftarrow}\mathfrak{D} \nleftrightarrow \mathfrak{D}^{\rightarrow}$$

Her $]\lambda, +\infty[\in \mathfrak{D}^{\rightarrow}$ için $]\lambda, +\infty[\in \mathcal{U}$ ve $]0,1[\in \mathcal{U}$ için $]0,1[\notin \mathfrak{D}^{\rightarrow}$ olduğundan

$$\mathfrak{D}^{\rightarrow} \subset \mathcal{U} \text{ ve } \mathcal{U} \nsubseteq \mathfrak{D}^{\rightarrow}$$

olur. Her $]-\infty, \lambda[\in {}^{\leftarrow}\mathfrak{D}$ için $]-\infty, \lambda[\in \mathcal{U}$ ve $]0,1[\in \mathcal{U}$ için $]0,1[\notin {}^{\leftarrow}\mathfrak{D}$ olduğundan

$${}^{\leftarrow}\mathfrak{D} \subset \mathcal{U} \text{ ve } \mathcal{U} \nsubseteq {}^{\leftarrow}\mathfrak{D}$$

olur. Böylece ayrık uzay ve ayrık olmayan uzay ile birlikte aşağıdaki diyagramı verebiliriz.

$$
\begin{tikzcd}
 & (\mathbb{R}, {}^{\leftarrow}\mathfrak{D}) \arrow[dr, phantom, "\subset"] \arrow[dd, leftrightarrow, "/" description] & & \\
(\mathbb{R},\{\emptyset,\mathbb{R}\}) \arrow[ur, phantom, "\subset"] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & & (\mathbb{R},\mathcal{U}) \arrow[r, phantom, "\subset"] & (\mathbb{R},\mathcal{P}(\mathbb{R})) \\
 & (\mathbb{R},\mathfrak{D}^{\rightarrow}) \arrow[ur, phantom, "\subset"] & &
\end{tikzcd}
$$

□

1.4 Topolojide Komşuluk Kavramı

Bir topolojik uzayda noktayı içeren açık kümeyi kapsayan kümeye o noktanın komşuluğu denir.

Tanım 1.4.1 *(X, τ) topolojik uzayı ve bir $x \in X$ noktası verilsin. $V \subset X$ alt kümesi x noktasını içeren bir açık kümeyi kapsıyorsa V kümesine x noktasının bir* ***komşuluğu*** *denir. V kümesi açık küme ise* ***açık komşuluk****, kapalı küme ise* ***kapalı komşuluk*** *denir. Bir x noktasının bütün komşuluklarından oluşan aile $\vartheta_{(x)}$ ile gösterilir. $\vartheta_{(x)}$ ailesine x noktasının* ***komşuluklar ailesi*** *denir.*

$$
\begin{aligned}
V,\ x \text{ noktasının komşuluğu} \quad &\Leftrightarrow \quad V \in \vartheta_{(x)} \Leftrightarrow \exists\, A \in \tau \ \ni\ x \in A \subset V \\
V \in \vartheta_{(x)} \ \wedge\ V \in \tau \quad &\Leftrightarrow \quad V,\ x \text{ noktasının açık komşuluğu} \\
V \in \vartheta_{(x)} \ \wedge\ V \in \tau^t \quad &\Leftrightarrow \quad V,\ x \text{ noktasının kapalı komşuluğu}
\end{aligned}
$$

Uyarı 1.4.2 *(X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere eğer $A \in \tau$ ise her $x \in A$ için*

$$x \in A \subset A$$

olacağından A kümesi içerdiği her noktanın bir açık komşuluğu olur.

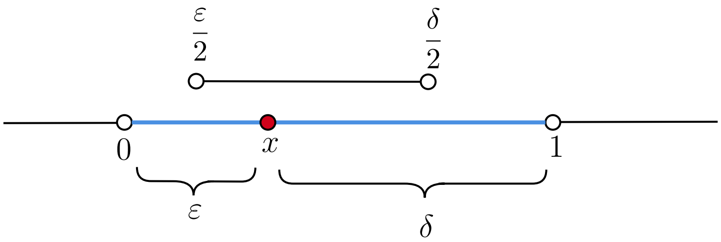
$$A \in \tau \Rightarrow \forall x \in A,\ A \in \vartheta_{(x)}$$

Uyarı 1.4.3 *(X, τ) topolojik uzayı ve $A \subset X$ verilsin. $x \notin A$ olması durumunda x noktasını içeren bir $U \in \tau$ açık kümesi için*

$$x \in U \not\subset A$$

olduğundan A kümesi içermediği hiçbir noktanın komşuluğu olamaz.

Örnek 1.4.4 *$(\mathbb{R},\mathcal{U})$ uzayında $]0, 1[$ açık aralığının hangi noktaların komşuluğu olduğunu inceleyelim. $x \in]0, 1[$ alalım. Bu durumda $x \neq 0$ ve $x \neq 1$ olacağından $d(0, x) = \varepsilon$ ve $d(x, 1) = \delta$ olacak şekilde $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ vardır.*



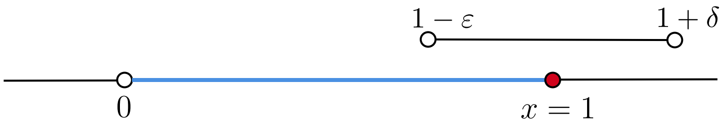
$U =]x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\delta}{2}[\in \mathcal{U}$ için $U \subset]0,1[$ olacağından $]0,1[$ açık aralığı içerdiği her noktanın bir komşuluğudur. Ayrıca $]0,1[\in \mathcal{U}$ olduğundan $]0,1[$ açık aralığı içerdiği her noktanın bir açık komşuluğudur.

Örnek 1.4.5 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında $]0,1]$ aralığının hangi noktaların komşuluğu olduğunu inceleyelim.*

Çözüm: $]0,1] \notin \mathcal{U}$ olduğundan $]0,1]$ aralığı içerdiği hiçbir noktanın açık komşuluğu olamaz. $0 < x < 1$ için $\varepsilon, \delta > 0$ olmak üzere

$$x \in \left] x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\delta}{2} \right[\subset]0,1]$$

olduğundan $0 < x < 1$ için $]0,1] \in \vartheta_{(x)}$ olur. $x = 1$ için $\varepsilon, \delta > 0$ olmak üzere



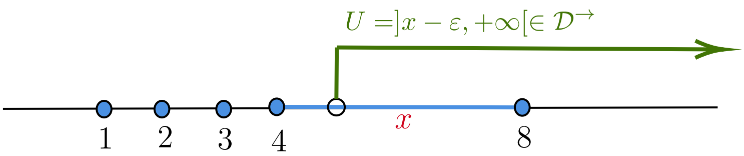
$1 \in]1-\varepsilon, 1+\delta[\nsubseteq]0,1]$ olduğundan $]0,1] \notin \vartheta_{(1)}$ olur. □

Sonuç 1.4.6 *Bir topolojik uzayda açık olmayan bir küme içerdiği noktalardan en az bir tanesi için komşuluk değildir.*

$$(X, \tau),\ A \subset X,\ A \notin \tau \iff \exists\, x \in A \ \ni\ A \notin \vartheta_{(x)}$$

Örnek 1.4.7 $(\mathbb{R}, \mathfrak{D}^{\rightarrow})$ *uzayında $A = \{1,2,3\} \cup [4,8]$ kümesinin hangi noktaların komşuluğu olduğunu inceleyelim.*

Çözüm: Her $x \in A$ noktası için noktayı içeren açık küme $x \in U =]x - \varepsilon, +\infty[$ için $y > 8$, $y \in U$ ve $y \notin A$ olduğundan $U \nsubseteq A$ bulunur. Sonuç olarak A kümesi $(\mathbb{R}, \mathfrak{D}^{\rightarrow})$ uzayında hiçbir nokta için komşuluk olamaz.



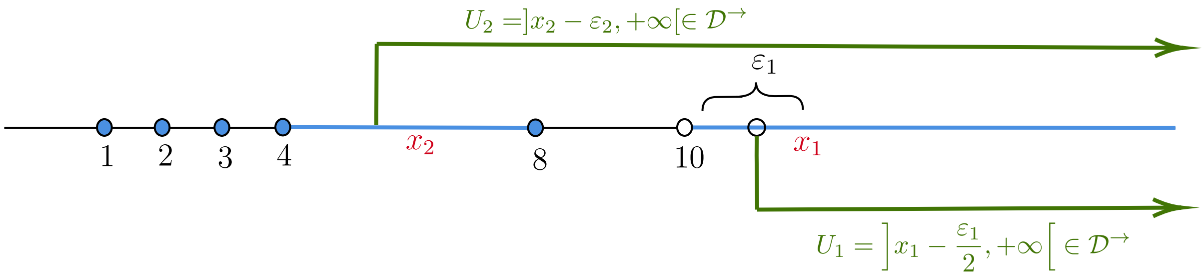
□

Örnek 1.4.8 *$(\mathbb{R}, \mathfrak{D}^{\rightarrow})$ uzayında $B = \{1,2,3\} \cup [4,8] \cup]10,+\infty[$ kümesinin hangi noktaların komşuluğu olduğunu inceleyelim.*

Çözüm: $x_1 > 10 \in B$ noktası için $x_1 \neq 10$ olduğundan $d(10, x_1) = \varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon \in \mathbb{R}$ vardır. $x_1 \in U_1 =]x_1 - \frac{\varepsilon}{2}[\in \mathfrak{D}^{\rightarrow}$ açık kümesi için

$$x_1 \in U_1 \subset B$$

olduğundan $x_1 > 10$ için $B \in \vartheta_{(x_1)}$ olur.



$x_2 < 10$ olsun. x_2 noktasını içeren açık küme $\varepsilon > 0$ olmak üzere $U_2 =]x_2 - \varepsilon, +\infty[$ için $10 \in U_2$ ve $10 \notin B$ olacağından B kümesi $(\mathbb{R}, \mathfrak{D}^{\rightarrow})$ uzayında $x_2 < 10$ için hiçbir nokta için komşuluk olamaz.

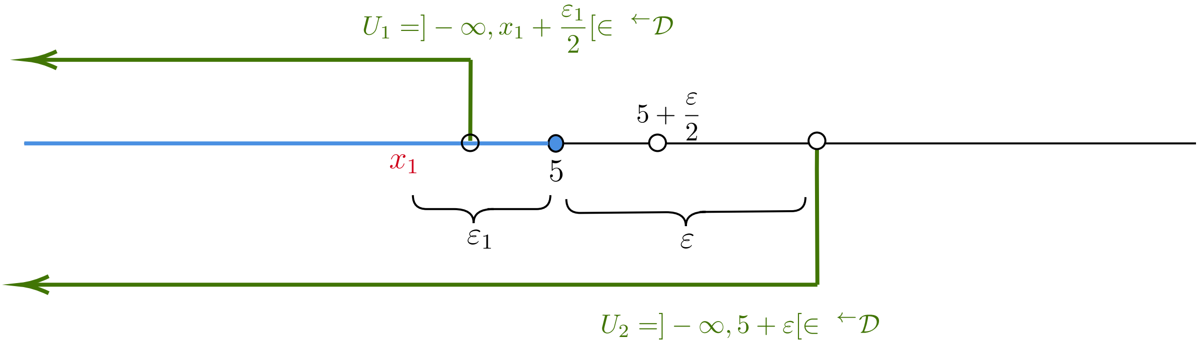
$\square$

Örnek 1.4.9 *$(\mathbb{R}, {}^{\leftarrow}\mathfrak{D})$ uzayında $C =]-\infty, 5]$ kümesinin hangi noktaların komşuluğu olduğunu inceleyelim.*

Çözüm: $x_1 < 5 \in C$ noktası için $x_1 \neq 5$ olduğundan $d(x_1, 5) = \varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon \in \mathbb{R}$ vardır. $x_1 \in U_1 =]x_1 + \frac{\varepsilon}{2}[\in {}^{\leftarrow}\mathfrak{D}$ açık kümesi için

$$x_1 \in U_1 \subset C$$

olduğundan $x_1 < 5$ için $C \in \vartheta_{(x_1)}$ olur.



$5 \in C$ noktasını içeren açık küme $\varepsilon > 0$ olmak üzere $U_2 =]-\infty, 5+\varepsilon[$ için $5 + \frac{\varepsilon}{2} \in U_2$ ve $5 + \frac{\varepsilon}{2} \notin C$ olacağından C kümesi $(\mathbb{R}, {}^{\leftarrow}\mathfrak{D})$ uzayında 5 noktası için komşuluk olmaz. Ayrıca $x > 5$ noktaları C kümesine ait olmadığından $x > 5$ için $C \notin \vartheta_{(x)}$ olur.

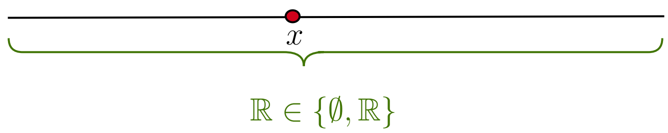
$\square$

Örnek 1.4.10 *$x \in \mathbb{R}$ noktasının $\mathbb{R}$ üzerinde farklı topolojiler için komşuluklarını inceleyelim.*

i.$(\mathbb{R}, \{\emptyset, \mathbb{R}\})$ *Kaba uzay: Bu uzayda $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ kümelerinden farklı açık küme yoktur. $x \in \emptyset$ olamayacağından*

$$x \in \mathbb{R} \subset V = \mathbb{R}$$

yazabiliriz. Sonuç olarak kaba uzayda bir noktanın tek bir komşuluğu vardır. Bu komşuluk uzayın kendisidir.

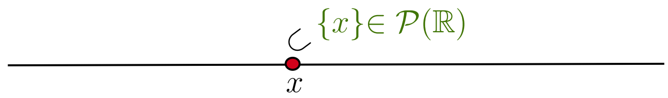


$$(\mathbb{R}, \{\emptyset, \mathbb{R}\}) \text{ Kaba uzay ve } V \in \vartheta_{(x)} \iff V = \mathbb{R}$$

ii.$(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ *İnce uzay: Bu uzayda her alt küme açık kümedir. Buradan $U = \{x\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ olduğundan*

$$x \in U = \{x\} \subset V$$

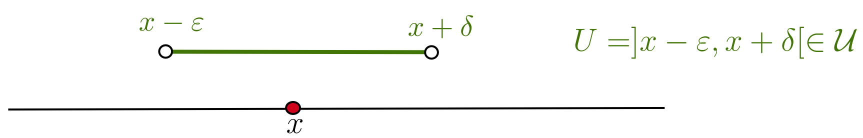
yazabiliriz. $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ uzayında x noktasını içeren her küme bu uzayda x noktasının komşuluğu olur.



$$(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R})) \text{ İnce uzay ve } V \in \vartheta_{(x)} \iff x \in V$$

Ayrıca ayrık (ince) uzayda her küme hem açık hem de kapalı küme olduğundan, x noktanın komşulukları da hem açık hem de kapalı komşuluk olurlar.

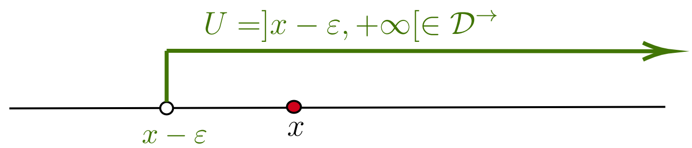
iii.$(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *alışılmış uzay: Bu uzayda x noktasını içeren açık kümeleri $\varepsilon, \delta > 0$ olmak üzere $U =]x - \varepsilon, x + \delta[\in \mathcal{U}$ olarak yazabiliriz. Buradan*



$$(\mathbb{R}, \mathcal{U}) \text{ Alışılmış uzay ve } V \in \vartheta_{(x)} \iff x \in U =]x - \varepsilon, x + \delta[\subset V$$

elde edilir.

iv.$(\mathbb{R}, \mathfrak{D}^{\rightarrow})$ *sağ ışın uzayı: Bu uzayda x noktasını içeren açık kümeleri $\varepsilon > 0$ olmak üzere $U =]x - \varepsilon, +\infty[$ olarak yazabiliriz. Buradan*



$$(\mathbb{R},\mathfrak{D}^{\rightarrow}) \text{ Sağ ışın uzayı ve } V \in \vartheta_{(x)} \iff x \in U =]x-\varepsilon,+\infty[\subset V$$

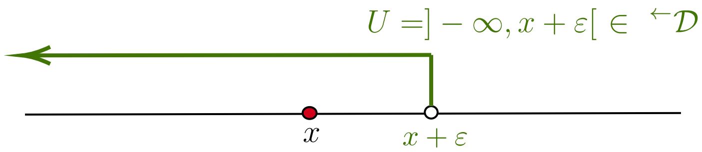
elde edilir.

$(\mathbb{R},\mathfrak{D}^{\rightarrow})$ sağ ışın uzayında F kapalı bir küme ise $F =]-\infty,\lambda]$ sağdan açık sonsuz bir aralık olacağından, F kümesinin soldan açık bir sonsuz aralığı içermesi için

$$x \in]x-\varepsilon,+\infty[\subset]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$$

olmalıdır. Sonuç olarak bu uzaydaki her noktanın tek bir kapalı komşuluğu vardır. Bu kapalı komşuluk uzayın kendisidir.

v.$(\mathbb{R},{}^{\leftarrow}\mathfrak{D})$ *sol ışın uzayı: Bu uzayda x noktasını içeren açık kümeleri $\varepsilon > 0$ olmak üzere $U =]-\infty, x+\varepsilon[$ olarak yazabiliriz. Buradan*



$$(\mathbb{R},{}^{\leftarrow}\mathfrak{D}) \text{ Sol ışın uzayı ve } V \in \vartheta_{(x)} \iff x \in U =]-\infty,x+\varepsilon[\subset V$$

elde edilir.

$(\mathbb{R},{}^{\leftarrow}\mathfrak{D})$ sol ışın uzayında F kapalı bir küme ise $F =]\lambda,+\infty]$ soldan açık sonsuz bir aralık olacağından, F kümesinin sağdan açık bir sonsuz aralığı içermesi için

$$x \in]-\infty,x+\varepsilon[\subset]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$$

olmalıdır. Sonuç olarak bu uzaydaki her noktanın tek bir kapalı komşuluğu vardır. Bu kapalı komşuluk uzayın kendisidir.

vi.$(\mathbb{R},\tau_{sonlu})$ *sonlu tümleyenler uzayı: Bu uzayda bir $B \subset \mathbb{R}$ için $x \notin B$ ve B kümesi sonlu bir küme olsun. $U = \mathbb{R} - B$ alalım.*

$$U^t = \mathbb{R} - (\mathbb{R} - B) = B$$

sonlu küme olacağından $U \in \tau_{sonlu}$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}(\mathbb{R},\tau_{sonlu}) \text{ Sonlu tümleyen uzayı ve } V \in \vartheta_{(x)} \iff & \exists B \subset \mathbb{R} \ni x \notin B, B \text{ sonlu için} \\ & \mathbb{R} - B \subset V\end{aligned}$$

elde edilir.

vii .$(\mathbb{R},\tau_{sayılabilir})$ *sayılabilir tümleyenler uzayı: Bu uzayda bir $B \subset \mathbb{R}$ için $x \notin B$ ve B kümesi sayılabilir bir küme olsun. $U = \mathbb{R} - B$ alalım.*

$$U^t = \mathbb{R} - (\mathbb{R} - B) = B$$

sayılabilir küme olacağından $U \in \tau_{sayılabilir}$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}(\mathbb{R},\tau_{sayılabilir}) \text{ Sayılabilir tümleyen uzayı ve } V \in \vartheta_{(x)} \iff & \exists B \subset \mathbb{R} \ni x \notin B, B \text{ sayılabilir için} \\ & \mathbb{R} - B \subset V\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 1.4.11 *$X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde*

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

topolojisi verilsin. d noktasının komşuluklarını inceleyelim. $d \in U = \{a, c, d\}$ açık kümesini içeren her $V \subset X$ kümesi için $V \in \vartheta_{(d)}$ olur. Şimdi V kümesinin (X, τ) uzayında açık küme veya kapalı küme olması durumunda açık veya kapalı komşuluk durumunu inceleyelim. Bu uzayda kapalı kümeleri kolayca belirlemek için kapalı kümelerin ailesini oluşturalım.

$$\tau^t = \{\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{c, d, e\}, \{c, d\}, \{b, e\}, \{e\}\}$$

Buradan d noktasının komşuluklarını aşağıdaki tablo ile verebiliriz.

Nokta	$x \in U \ni U \in \tau$ Noktayı içeren açık küme	$U \subset V$ açık kümeyi içeren küme (Komşuluk)	$V \in \tau$ ise açık komşuluk	$V \in \tau^t$ ise kapalı komşuluk
d	$\{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}$	$\{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}$, $\{a, c, d, e\}$	$\{a, c, d\}$, $\{a, b, c, d\}$	X

Örnek 1.4.12 $(\mathbb{N}, \tau_{\mathbb{N}})$ *uzayında bir $n \in \mathbb{N}$ noktasının komşuluklarını inceleyelim. İlk olarak* $4 \in \mathbb{N}$ *noktasının komşuluklarını inceleyelim. Bu uzaydaki açık ve kapalı kümeleri*

	Açık Küme	Kapalı Küme
$(\mathbb{N}, \tau_{\mathbb{N}})$	$\emptyset$, $E_1 = \mathbb{N}$, E_2, E_3, E_4, ... , E_n $(n \in \mathbb{N})$	$\emptyset$, $\mathbb{N}$, $E_2^t = \{1\}$, $E_3^t = \{1, 2\}$, $E_4^t = \{1, 2, 3\}$, ... , $F_n = \{1, 2, ...n\}$

tablosu ile verebiliriz. Buradan 4 noktasını içeren açık kümeler E_1, E_2, E_3, E_4 olduğundan 4 noktasının açık komşulukları olur. Bu uzayda açık bir kümeyi içeren tek kapalı küme $\mathbb{N}$ *olduğundan 4 noktasının tek kapalı komşuluğu olur. 4 noktasını içeren açık kümeleri kapsayan küme komşuluk olacağından E_1, E_2, E_3, E_4 açık komşuluklarına ilaveten bu açık komşulukları kapsayan $E_4 \cup \{1\}, E_4 \cup \{2\}, E_4 \cup \{1, 3\}, E_4 \cup \{1, 2\}$ kümeleri 4 noktasının komşulukları olur.*

$n \in \mathbb{N}$ noktası için genelleştirelim. $(\mathbb{N}, \tau_{\mathbb{N}})$ uzayında bir $n \in \mathbb{N}$ noktasının komşulukları

$$E_n \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} \{n\} \right)$$

kümeleri olur. Ayrıca $k \leqslant n, k \in \mathbb{N}$ için E_k açık kümeleri n noktasının açık komşulukları olur. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi n noktasının tek kapalı komşuluğu olur.

Teorem 1.4.13 *(X, τ) topolojik uzayında bir $A \subset X$ alt kümesinin açık küme olması için gerek ve yeter şart A kümesinin, içerdiği her noktanın bir komşuluğu olmasıdır.*

$$(X, \tau),\ A \subset X,\ A \in \tau \iff \forall x \in A,\ A \in \vartheta_{(x)}$$

İspat. $\Rightarrow$ (X, τ) topolojik uzay ve bir $A \subset X$ olsun. $A \in \tau$ ise $A \subset A$ olduğundan

$$x \in A \subset A \implies A \in \vartheta_{(x)}$$

elde edilir.

$\Leftarrow$ Her $x \in A$ için $A \in \vartheta_{(x)}$ olsun. Buradan her $x \in A$ için $x \in U_x \subset A$ olacak şekilde $U_x \in \tau$ açık kümesi vardır.

$$x \in U_x \subset A \implies \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} U_x \subset A$$

yazabiliriz. Ayrıca $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ olduğundan

$$A \subset \bigcup_{x \in A} U_x \subset A$$

sıkıştırma teoreminden

$$\bigcup_{x \in A} U_x = A$$

elde edilir. Her $x \in A$ için U_x kümesi açık küme ve açık kümelerin herhangi birleşimi açık küme olduğundan eşitliğin sol tarafı açık küme olur. Dolayısıyla eşitliğin sağ tarafı A kümeside açık küme olur. □

Teorem 1.4.14 *(X, τ) bir topolojik uzay olsun. $x \in X$ noktasının komşuluklar ailesi $\vartheta_{(x)}$ aşağıdaki özellikleri sağlar.*

v₁. $V \in \vartheta_{(x)} \implies x \in V$

v₂. $V_1, V_2 \in \vartheta_{(x)} \implies V_1 \cup V_2 \in V$

v₃. $V \in \vartheta_{(x)},\ \exists W \ni U \subset W \implies W \in \vartheta_{(x)}$

v₄. $V \in \vartheta_{(x)},\ \exists W \in \vartheta_{(x)} \ni \forall y \in W,\ V \in \vartheta_{(y)}$

İspat. $\mathbf{v_1}$. $x \in X$ noktasının her V komşuluğu için

$$x \in U \subset V$$

olacak şekilde $U \in \tau$ açık kümesi olacağından $x \in V$ elde edilir.

$\mathbf{v_2}$. $V_1, V_2 \in \vartheta_{(x)}$ olsun.

$$\begin{aligned} V_1, V_2 \in \vartheta_{(x)} &\implies \exists\, U_1 \in \tau \;\ni\; x \in U_1 \subset V_1 \,\wedge \\ &\quad\;\;\; \exists\, U_2 \in \tau \;\ni\; x \in U_2 \subset V_2 \\ &\implies U_1 \cap U_2 \subset V_1 \cap V_2 && ...(U_1, U_2 \in \tau \implies U_1 \cap U_2 \in \tau) \\ &\implies V_1 \cap V_2 \;\in \vartheta_{(x)} && ...(x \in U_1 \cap U_2 \subset V_1 \cap V_2) \end{aligned}$$

$\mathbf{v_3}$. $V \in \vartheta_{(x)}$ ve bir $W \subset X$ için $V \subset W$ olsun.

$$\begin{aligned} V \in \vartheta_{(x)} &\implies \exists\, U \in \tau \;\ni x \in U \subset V \\ &\implies \exists\, U \in \tau \;\ni x \in U \subset W \quad ...(U \subset W) \\ &\implies W \;\in \vartheta_{(x)} \end{aligned}$$

$\mathbf{v_4}$. $V \in \vartheta_{(x)}$ olsun.

$$\begin{aligned} V \in \vartheta_{(x)} &\implies \exists\, U \in \tau \;\ni\; x \in U \subset V \\ &\implies \exists\, W \in \tau \;\ni\; x \in W \subset W && ...(W = U) \\ &\implies W \in \vartheta_{(x)} \\ &\implies y \in W \subset V && ...(W \in \tau, \forall y \in W) \\ &\implies V \in \vartheta_{(y)} \end{aligned}$$

□

Tanım 1.4.15 $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$, $\mathbf{v_4}$ *aksiyomlarına komşuluk aksiyomları denir.*

Önerme 1.4.16 *Bir noktanın herhangi sayıdaki komşuluklarının birleşimide o noktanın bir komşuluğu olur.*

İspat. (X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. I herhangi bir indis ailesi olmak üzere her $i \in I$ için $V_i \in \vartheta_{(x)}$ olsun. $\bigcup\limits_{i \in I} V_i \in \vartheta_{(x)}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} \forall i \in I,\ V_i \in \vartheta_{(x)} &\implies \exists\, U_i \in \tau, \;\ni\; x \in U_i \subset V_i \\ &\implies \exists \bigcup_{i \in I} U_i, \ni x \in \bigcup_{i \in I} U_i \subset \bigcup_{i \in I} V_i && \ldots (A \subset B \;\wedge\; C \subset D \Rightarrow A \cup C \subset B \cup D) \\ &\implies \exists \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau, \ni x \in \bigcup_{i \in I} U_i \subset \bigcup_{i \in I} V_i && ...(\forall i \in I,\ U_i \in \tau \implies \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau) \\ &\implies \bigcup_{i \in I} V_i \;\in \vartheta_{(x)} \end{aligned}$$

□

1.5 Topoloji Tabanı ve Alt Taban

Bir topoloji tanımlamak için tüm açık alt kümeleri belirlemek yerine, daha kolay bir yol olarak "taban" kavramı kullanılabilir. Topoloji taban, topolojik yapının temelini oluşturan ve tüm açık kümelerin bilgisini içeren bir alt küme koleksiyonu olarak düşünülebilir. Bu aile, topolojik yapının açık kümeleri üzerindeki temel özellikleri ve ilişkileri yakalamak için yeterli bilgiyi sağlar. Taban elemanları, topolojinin diğer açık kümelerini oluşturmak için birer "yapı taşı" olarak kullanılır.

Tabanlar, topoloji hakkındaki birçok ifadenin bu topolojiyi oluşturan bir tabana indirgenebileceği ve birçok topolojinin tabanlar üzerinden kolayca tanımlanabileceği için faydalıdır.

İlk olarak, bir topolojiyle ilgili birçok ifade ve özellik, o topolojiyi üreten bir tabana indirgenerek basitleştirilebilir. Bir topolojideki tüm açık kümelerin yerine, tabanın elemanlarıyla ilgili özellikler ve ilişkiler üzerine odaklanabiliriz. Bu basitleştirme genellikle daha yönetilebilir ve sezgisel kanıtlar ve argümanlar sunar.

İkinci olarak, bir topolojiyi bir taban üzerinden tanımlamak pratik ve kullanışlı bir yaklaşımdır. Bazı durumlarda, tüm açık kümeleri tek tek listelemek yerine bir taban belirtmek daha kolay olabilir. Bir taban sağlayarak, topolojinin temel özelliklerini yakalar ve diğer açık kümeleri taban elemanlarının birleşimleri veya sonlu kesişimleri alarak elde edebiliriz.

Tabanlar, topolojik uzayları daha yapılandırılmış ve düzenli bir şekilde incelememizi sağlar. Bir topolojinin temel özelliklerini anlamak için bir çerçeve sunar ve farklı topolojik uzaylar arasında bağlantılar kurmamızı sağlar. Tabanlarla çalışarak, genellikle topolojileri incelemek için gereken analizi ve mantığı basitleştirebiliriz.

Tanım 1.5.1 *(X,τ) topolojik uzayının bir* ***tabanı*** *$\mathcal{B}$ ailesi , (X,τ) uzayının her açık kümesinin $\mathcal{B}$ ailesinin elemanlarının birleşimi olarak ifade edilebilme özelliğine sahip $\mathcal{P}(X)$ kuvvet kümesinin alt kümesidir. $\mathcal{B}$ bir τ topolojisi için taban ise τ topolojisine $\mathcal{B}$ tabanı tarafından üretiliyor denir ve $<\mathcal{B}>=\tau$ ile gösterilir.*

$$<\mathcal{B}>=\tau \iff \forall A\in\tau,\ A=\bigcup_{B\in I} B \quad \ni I\subset\mathcal{B}$$

Uyarı 1.5.2 *(X,τ) topolojik uzayının bir tabanı $\mathcal{B}$ olmak üzere her $A\in\mathcal{B}$ için $A\cup A=A$ olduğundan $A\in\tau$ bulunur. Buradan*

$$\mathcal{B}\subset\tau$$

olacağından $\mathcal{B}$ ailesinin her elemanı açık küme olur.

Uyarı 1.5.3 *(X,τ) topolojik uzayının bir tabanı $\mathcal{B}$ ailesi olmak üzere $\emptyset\in\tau$ için*

$$\emptyset=\bigcup_{i\in\emptyset} B_i \quad \ni B_i\in\mathcal{B}$$

olduğundan $\emptyset\in\mathcal{B}$ olması zorunlu değildir.

Örnek 1.5.4 *$X = \{x, y\}$ kümesi üzerinde $\tau = \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, X, \{x\}, \{y\}\}$ ayrık topolojisi için*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 &= \{\{x\}, \{y\}\}\\ \mathcal{B}_2 &= \{\{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}\\ \mathcal{B}_3 &= \{\emptyset, \{x\}, \{y\}\}\\ \mathcal{B}_4 &= \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}\end{aligned}$$

aileleri birer tabandır.

Sonuç 1.5.5 *(X, τ) topolojik uzayının birden fazla tabanı olabilir.Ancak bir taban yalnızca tek bir topolojiyi oluşturur. Farklı tabanlar kullanarak aynı topolojiyi elde etmek mümkün olduğundan $\mathcal{B}$ ailesi (X, τ) topolojik uzayının tabanıdır ifadesi yerine, (X, τ) topolojik uzayının bir tabanıdır ifadesini kullanılır.*

Örnek 1.5.6 *$(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık uzayı için*

$$\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$$

ailesi bir tabandır. Örneğin $X = \{a, b, c, d\}$ için $\mathcal{B}$ ailesi

$$\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$$

olarak elde edilir.

Örnek 1.5.7

$$\mathcal{B} = \{[a, b[: a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } a \leqslant b\}$$

ailesi $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde bir topoloji belirtir.

$$\tau_{ALT} = \{A \subset \mathbb{R} : A = \bigcup_{i \in I} [a_i, b_i[, \quad \ni \forall i \in I,\ [a_i, b_i[\in \mathcal{B}\ \}$$

ailesine $\mathbb{R}$ kümesinin ***alt limit topolojisi*** *denir.*

Örnek 1.5.8

$$\mathcal{B} = \{\ ]a, b] : a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } a \leqslant b\}$$

ailesi $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde bir topoloji belirtir.

$$\tau_{ÜST} = \{A \subset \mathbb{R} : A = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i], \quad \ni \forall i \in I,\ ]a_i, b_i] \in \mathcal{B}\ \}$$

ailesine $\mathbb{R}$ kümesinin ***üst limit topolojisi*** *denir.*

Teorem 1.5.9 *(X, τ) topolojik uzayının bir tabanı $\mathcal{B}$ ve $A \subset X$ olsun. $A \in < \mathcal{B} >$ olması için gerek ve yeter şart her $x \in A$ noktası için $x \in B \subset \mathcal{B}$ olacak şekilde en az bir $B \in \mathcal{B}$ kümesinin olmasıdır.*

İspat. $\Rightarrow$ $A \in < \mathcal{B} >$ olsun. $A \in \tau$ ve $\mathcal{B}$ ailesi (X, τ) topolojik uzayının bir tabanı olduğundan A kümesi tabandaki elemanların birtakım birleşimi olarak yazılabilir.

$$A = \bigcup_{i \in I} B_i \quad \ni B_i \in \mathcal{B}$$

Buradan

$$\begin{aligned} x \in A &\Longrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} B_i \\ &\Longrightarrow \exists B_i \in \mathcal{B},\ x \in B_i \\ &\Longrightarrow x \in B_i \subset A \qquad ...(B_i \subset \bigcup_{i \in I} B_i) \end{aligned}$$

elde edilir.

$\Leftarrow$ Her $x \in A$ noktası için $x \in B_x \subset A$ olacak şekilde bir $B_x \subset \mathcal{B}$ kümesi olsun. Buradan

$$A = \bigcup_{x \in A} B_x \quad \ni B_x \in \mathcal{B}$$

elde edilir. Sonuç olarak A kümesini tabandaki elemanların birtakım birleşimi olarak ifade edilebileceğinden $A \in < \mathcal{B} >$ olur. □

Teorem 1.5.10 *$\mathcal{B}_1$,$\mathcal{B}_2$ aileleri (X, τ) topolojik uzayının birer tabanı olmak üzere, $< \mathcal{B}_1 > = < \mathcal{B}_2 >$ olması için gerek ve yeter şart*

(**i**) $\forall B_1 \in \mathcal{B}_1, \forall x \in B_1,\ \exists B_2 \in \mathcal{B}_2 \ \ni x \in B_2 \subset B_1$

(**ii**) $\forall B_2 \in \mathcal{B}_2, \forall x \in B_2,\ \exists B_1 \in \mathcal{B}_1 \ \ni x \in B_1 \subset B_2$

olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$ $< \mathcal{B}_1 > = < \mathcal{B}_2 >$ ve $A \in < \mathcal{B}_1 >$ olsun. $< \mathcal{B}_1 > = < \mathcal{B}_2 >$ olduğundan $A \in < \mathcal{B}_2 >$ olur. $\mathcal{B}_2$ taban olduğundan (**i**) ifadesi elde edilir. Benzer şekilde (**ii**) ifadesi de elde edilebilir.

$\Leftarrow$ (**i**) ve (**ii**) ifadeleri sağlansın. $A \in < \mathcal{B}_1 >$ için

$$\begin{aligned} A \in < \mathcal{B}_1 > &\Longrightarrow A = \bigcup_{i \in I} B_i \ \ni B_i \in \mathcal{B}_1 && ...(\mathcal{B}_1 \text{ taban}) \\ &\Longrightarrow x \in A, \exists B_i \in B_1, x \in B_1 \subset A \\ &\Longrightarrow x \in B_2 \subset B_1 && ...((\mathbf{i})\text{ifadesinden}) \\ &\Longrightarrow \forall x \in A,\ A \in < B_2 > && ...(\mathcal{B}_2 \text{ taban}) \\ &\Longrightarrow < \mathcal{B}_1 > \subset < \mathcal{B}_2 > \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $< \mathcal{B}_2 > \subset < \mathcal{B}_1 >$ elde edilir. Sonuç olarak

$$< \mathcal{B}_1 > = < \mathcal{B}_2 >$$

bulunur. □

Tanım 1.5.11 *(X, τ) topolojik uzayının sayılabilir bir tabanı varsa (X, τ) uzayına **ikinci sayılabilir uzay** denir.*

Örnek 1.5.12 *$(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayının bir tabanı*

$$\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

ailesidir. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi sayılabilir olduğundan $\mathcal{B}$ ailesi sayılabilir olur. Sonuç olarak sayılabilir bir tabanı olduğundan $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayı ikinci sayılabilir uzay olur.

Uyarı 1.5.13 *X kümesinin sonlu bir küme olması durumunda üzerindeki bir topoloji sonlu sayıda açık kümeye sahip olacağından $\mathcal{B} \subset \tau$ ailesi de sonlu olur. Sonlu her küme sayılabilir olduğundan (X, τ) topolojik uzayı ikinci sayılabilir uzay olur.*

Örnek 1.5.14 *$X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\mathcal{B} = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ ailesi X kümesi üzerinde herhangi bir topoloji için taban belirtmez.*

Çözüm: $\mathcal{B}$ ailesinin ürettiği aile $\mathcal{B}$ ailesinin elemanlarının herhangi birleşiminde oluşan τ^* ailesini

$$< \mathcal{B} >= \tau^* = \{\emptyset, X, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

olarak yazabiliriz. Burada $\{a, b\}, \{b, c\} \in \tau^*$ için $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin \tau^*$ olduğundan τ^* ailesi X kümesi üzerinde bir topoloji değildir. Sonuç olarak $\mathcal{B}$ ailesi X kümesi üzerinde herhangi bir topoloji için taban olamaz. □

Örnek 1.5.15 *$X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{b\}\}$ ailesi X kümesi üzerinde herhangi bir topoloji için taban belirtmez.*

Çözüm: $\mathcal{B}$ ailesinin ürettiği aile $\mathcal{B}$ ailesinin elemanlarının herhangi birleşiminde oluşan τ^* ailesini

$$< \mathcal{B} >= \tau^* = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b\}, \{a\}\}$$

olarak yazabiliriz. Burada $X \notin \tau^*$ olduğundan τ^* ailesi X kümesi üzerinde bir topoloji değildir. Sonuç olarak $\mathcal{B}$ ailesi X kümesi üzerinde herhangi bir topoloji için taban olamaz.

□

Teorem 1.5.16 *$\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ ailesi,*

(**i**) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

(**ii**) *Her $A, B \in \mathcal{B}$ ve her $x \in A \cap B$ için $\exists C \in \mathcal{B} \ni x \in C \subset A \cap B$*

şartlarını sağlıyorsa $\mathcal{B}$ ailesinin ürettiği $< \mathcal{B} >$ ailesi X kümesi üzerinde bir topoloji belirtir.

İspat. $< \mathcal{B} >$ ailesi X kümesi üzerinde bir topoloji olsun.

(**i**) $X \in < \mathcal{B} >$ olduğundan X kümesi $\mathcal{B}$ ailesinin elemanlarının birtakım birleşimi olarak yazılabilir.

$$X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

(**ii**) $A, B \in \mathcal{B}$ alalım.

$$\begin{aligned}
A, B \in \mathcal{B} \;&\Rightarrow\; A, B \in <\mathcal{B}> && \dots (\mathcal{B} \subset <\mathcal{B}>) \\
&\Rightarrow\; A \cap B \in <\mathcal{B}> && \dots ((X,\; <\mathcal{B}>) \text{ topolojik uzay}) \\
&\Rightarrow\; \exists C \in \mathcal{B}\,, x \in C \subset A \cap B && \dots (\mathcal{B} \text{ taban})
\end{aligned}$$

(i) ve (ii) sağlandığında $<\mathcal{B}>$ ailesinin açıklar aksiyomlarını sağladığını gösterelim.

T_1. $\bigcup_{i \in \emptyset} = \emptyset$ olduğundan $\emptyset \in <\mathcal{B}>$ elde edilir. Ayrıca (i) ifadesinden $X \in <\mathcal{B}>$olur.

T_2. I herhangi bir indis ailesi olmak üzere $A_i \in <\mathcal{B}>$ olsun. Her $i \in I$ için

$$\begin{aligned}
\forall i \in I, A_i \in <\mathcal{B}> \;&\Rightarrow\; A_i = \bigcup_{B_i \in \mathcal{B}} B_i \\
&\Rightarrow\; \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{B_i \in \mathcal{B}} B_i \right) \\
&\Rightarrow\; \bigcup_{i \in I} A_i \in <\mathcal{B}>
\end{aligned}$$

elde edilir.

T_3. $A_1, A_2 \in <\mathcal{B}>$ olsun. $A_1 \cap A_2 \in <\mathcal{B}>$ olduğunu gösterelim. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ise $\emptyset \in <\mathcal{B}>$ olur. $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda bir $a \in A_1 \cap A_2$ için,

$$\begin{aligned}
a \in A_1 \cap A_2 \;&\Rightarrow\; a \in A_1 \wedge a \in A_2 \\
&\Rightarrow\; \begin{matrix} \exists B_1 \in B \;\ni\; a \in B_1 \subset A_1 \\ \exists B_2 \in B \;\ni\; a \in B_2 \subset A_2 \end{matrix} \\
&\Rightarrow\; a \in B_1 \cap B_2 \subset A_1 \cap A_2 \\
&\Rightarrow\; a \in B_x \subset B_1 \cap B_2 \subset A_1 \cap A_2 \quad \dots ((ii) \text{ ifadesinden}) \\
&\Rightarrow\; A_1 \cap A_2 = \bigcup_{B_x \in \mathcal{B}} B_x \\
&\Rightarrow\; A_1 \cap A_2 \in <\mathcal{B}>
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Lemma 1.5.17 *$\mathcal{B}$ ailesi (X, τ) topolojik uzayının bir tabanı olmak üzere eğer $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_1 \subset \tau$ olacak şekilde bir $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ ailesi varsa $\mathcal{B}_1$ aileside τ topolosinin bir tabanıdır.*

İspat. (X, τ) uzayındaki her açık kümenin $\mathcal{B}_1$ ailesine ait kümelerin herhangi birleşimi şeklinde yazılabileceğini gösterelim.

$$\begin{aligned}
A \in \tau \quad &\Rightarrow \quad A = \bigcup_{i\in I} B_i \ \ , \ B_i \in \mathcal{B} \qquad \ldots (\mathcal{B} \ taban) \\
&\Rightarrow \quad A = \bigcup_{i\in I} B_i \ \ , \ B_i \in \mathcal{B}_1 \qquad \ldots (\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_1) \\
&\Rightarrow \quad \mathcal{B}_1 \text{ taban}
\end{aligned}$$

□

Tanım 1.5.18 *(X, τ) uzayı ve bir $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ ailesi verilsin. Eğer $\mathcal{S}$ ailesini sonlu arakesitlerinin oluşturduğu aile τ topolojisini üretiyorsa $\mathcal{S}$ ailesine τ topolojisinin bir **alt tabanı** denir. τ ailesine $\mathcal{S}$ ailesinin doğrduğu topoloji denir ve $\tau(S)$ ile gösterilir.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S} \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[r, bend left, "\bigcap_{i=1}^{n} S_i \ \ni \ S_i \in \mathcal{S}"] & \mathcal{B} \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[r, bend left, "\bigcup_{i\in I} B_i \ \ni \ B_i \in \mathcal{B}"] & \tau(\mathcal{S})
\end{tikzcd}$$

Örnek 1.5.19 *$X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde*

$$\mathcal{S} = \{\emptyset, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$$

ailesinin doğurduğu topolojiyi bulalım.

Çözüm: $\mathcal{S}$ ailesine ait kümelerin herhangi sonlu arakesitlerinden

$$\mathcal{B} = \{\emptyset, X, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{c\}, \{d\}\}$$

ailesi elde edilir. $\mathcal{B}$ ailesine ait kümelerin herhangi birleşimlerinden

$$\tau(\mathcal{S}) = \{\emptyset, X, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b, c, d\}, \{c, d, e\}\}$$

topolojisi elde edilir.

□

Uyarı 1.5.20 *(X, τ) uzayının bir alt tabanı $\mathcal{S}$ olmak üzere*

$$\bigcap_{i\in\emptyset} S_i = X \quad \ni S_i \in \mathcal{S}$$

olduğundan $X \in \mathcal{B}_i$ olur. Ayrıca $\mathcal{S}$ ailesinin sonlu arakesitlerinin oluşturduğu $\mathcal{B}$ ailesi için için

$$\bigcup_{i\in\emptyset} B_i = \emptyset \quad \ni B_i \in \mathcal{B}$$

olduğundan $\mathcal{B}$ ailesinin herhangi birleşimlerinin oluşturduğu $<\mathcal{B}> = \tau(\mathcal{S})$ ailesi için $\emptyset \in <\mathcal{B}>$ elde edilir. Sonuç olarak $\tau(\mathcal{S})$ için $\emptyset, X \in \tau(\mathcal{S})$ olduğundan ve $\tau(\mathcal{S})$ ailesi sonlu arakesit ve herhangi birleşimler altında kapalı olduğundan bir alt taban tarafından doğurulan $\tau(\mathcal{S})$ ailesi X kümesi üzerinde her zaman bir topoloji belirtir.

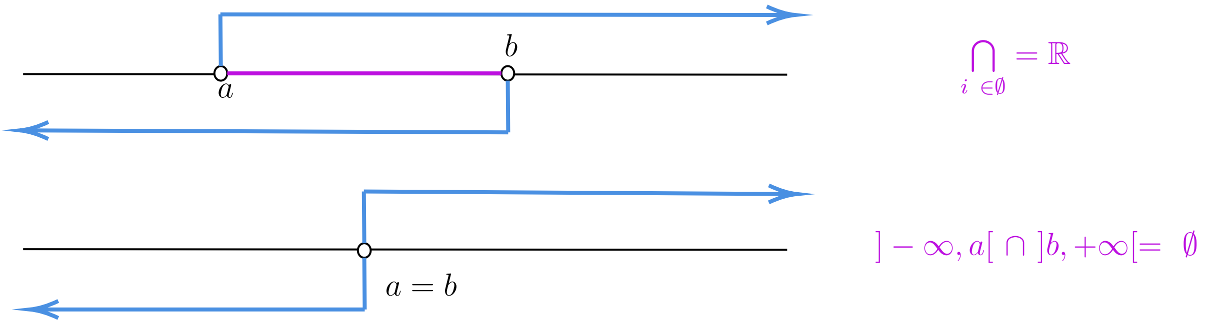
Örnek 1.5.21 $\mathbb{R}$ *kümesi üzerinde*

$$\mathcal{S} = \{\ ]-\infty, b[,\ \ ]a, +\infty[\ : a, b \in \mathbb{R}\ ve\ a \leqslant b\}$$

ailesinin bir alt taban olduğu topolojiyi oluşturalım. $\mathcal{S}$ *ailesinin sonlu arakesitlerinden*

$$\mathcal{B} = \{\ ]-\infty, b[,]a, +\infty[,]a, b[\ : a, b \in \mathbb{R}\ ve\ a \leqslant b\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

ailesini elde ederiz.



$\mathcal{B}$ *ailesinin ürettiği aile* $< \mathcal{B} >$, $\mathbb{R}$ *kümesi üzerinde bir topoloji belirtir.* $\mathcal{S}$ *ailesini alt taban kabul eden topolojik uzay* $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *alışılmış uzayıdır.*

Tanım 1.5.22 (X, τ) *topolojik uzay ve* $x \in X$ *olmak üzere, eğer* x *noktasının her* V *komşuluğu için* $W \subset V$ *olacak şekilde bir* $W \in \mathcal{G}_{(x)}$ *ailesi varsa* $\mathcal{G}_{(x)}$ *ailesine,* τ *topolojisine göre,* x *noktasının bir komşuluklar tabanı denir.*

$$\mathcal{G}_{(x)} \subset \vartheta_{(x)} \Leftrightarrow \forall V \in \vartheta_{(x)},\ \exists W \in \mathcal{G}_{(x)}\ \ni\ W \subset V$$

Uyarı 1.5.23 *Bir komşuluk tabanınına ait olan küme aynı zamanda bir komşuluk olduğundan komşuluklar ailesine ait sonlu arakesit ve herhangi birleşim altında kapalılık özelliği gibi özellikler komşuluklar tabanı ailesi için de geçerli olacaktır.*

Örnek 1.5.24 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında bir* $x \in \mathbb{R}$ *noktası için*

$$\vartheta_{(x)} = \{\ ]x - 2\varepsilon, x + 2\varepsilon[\ :\ \varepsilon > 0\ \}$$

ailesi x *noktasının komşuluklarının bir ailesi olduğundan*

$$\mathcal{G}_{(x)} = \{\ ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\ :\ \varepsilon > 0\ \}$$

ailesi x *noktasının bir komşuluk tabanı olur.*

Örnek 1.5.25 $(X, \mathcal{P}(X))$ *ayrık uzayında uzayında bir* $x \in X$ *noktası için*

$$\vartheta_{(x)} = \{\ \{x\}\ \ : x \in X\}$$

ailesi x *noktasının komşuluklarının bir ailesi ve her* $x \in X$ *için* $\{x\} \subset \{x\}$ *olduğundan*

$$\mathcal{G}_{(x)} = \{\ \{x\}\ \ : x \in X\}$$

ailesi x *noktasının bir komşuluk tabanı olur.*

Teorem 1.5.26 *(X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere $\mathcal{B}$ ailesinin τ topolojisinin bir tabanı olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ noktası için*

$$\mathcal{G}_{(x)} = \{B \subset X : x \in B \subset \mathcal{B}\}$$

ailesinin x noktasının bir komşuluk tabanı olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ ailesinin τ topolojisinin bir tabanı olsun. $x \in X$ herhangi bir nokta olsun. Her $V \in \vartheta_{(x)}$ komşuluğu için $x \in B \subset V$ olacak şekilde bir $B \in \mathcal{B}$ kümesi olduğunu göstermeliyiz. $V \in \vartheta_{(x)}$ alalım. Buradan

$$\begin{aligned} V \in \vartheta_{(x)} &\Rightarrow \exists A \in \tau \ \ni x \in A \subset V \\ &\Rightarrow \exists B \in \mathcal{B} \ \ni x \in B \subset A \qquad \ldots (\mathcal{B} \subset \tau) \\ &\Rightarrow \exists B \in \mathcal{B} \ \ni x \in B \subset V \qquad \ldots (A \subset V) \end{aligned}$$

elde edilir.

$\Leftarrow$ $\mathcal{G}_{(x)}$ ailesi $x \in X$ noktasının bir komşuluk tabanı olsun. Her $A \in \tau$ açık kümesinin $\mathcal{B}$ ailesine ait kümelerin birtakım birleşimi olarak yazılabildiğini göstermeliyiz. x noktasını içeren bir $A \in \tau$ açık kümesi verilsin. Buradan

$$\begin{aligned} x \in A \ \wedge \ A \in \tau &\Rightarrow A \in \vartheta_{(x)} \qquad \ldots(x \in A \subset A) \\ &\Rightarrow \exists B_x \in \mathcal{B} \ \ni x \in B_x \subset A \qquad \ldots \big(\mathcal{G}_{(x)} \subset \mathcal{B}\big) \\ &\Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} B_x \ \ni B_x \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

olduğundan $\mathcal{B}$ ailesi τ topolojisinin bir tabanı olur. □

Sonuç 1.5.27 *(X,τ) topolojik uzayının bir tabanı $\mathcal{B}$ ailesi olmak üzere*

$$\mathcal{G}_{(x)} = \{B \subset X : x \in B \subset \mathcal{B}\}$$

ailesi x noktasının bir komşuluk tabanı olduğundan

$$\mathcal{G}_{(x)} \subset \mathcal{B}$$

elde edilir.

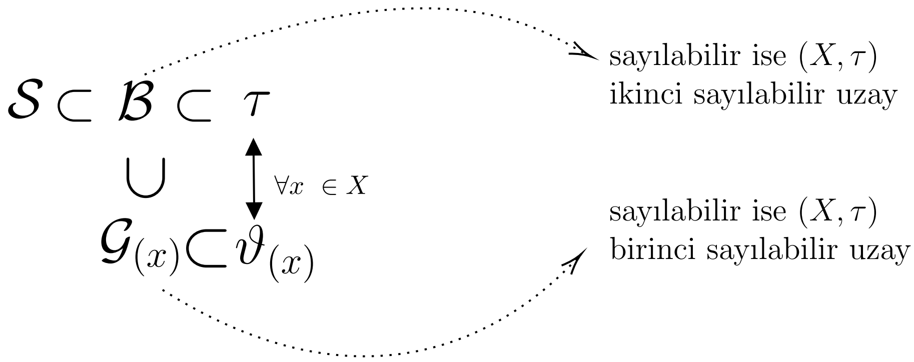
Tanım 1.5.28 *(X,τ) topolojik uzayının sayılabilir bir komşuluklar tabanı varsa (X,τ) uzayına **birinci sayılabilir uzay** denir.*

Örnek 1.5.29 *$(\mathbb{R},\mathcal{U})$ uzayında her $x \in \mathbb{R}$ noktası için*

$$\mathcal{G}_{(x)} = \left\{ \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[\ : n \in \mathbb{N} \right\}$$

ailesi x noktasının bir komşuluk tabanıdır. $\mathcal{G}_{(x)}$ ailesine ait kümeler ile $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi arasında birebir bir eşleme yapabileceğimizden $\mathcal{G}_{(x)}$ ailesi sayılabilirdir. Sonuç olarak $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ birinci sayılabilir uzaydır.

Not. (X, τ) topolojik uzay olmak üzere $x \in X$ noktasını içeren her $A \in \tau$ açık kümesi ile x noktasının komşuluklar ailesi ile birebir bir eşleme yapılabilir.



□

Sonuç 1.5.30 *Bir topolojik uzayda $\mathcal{G}_{(x)} \subset \mathcal{B}$ olduğundan uzay ikinci sayılabilir uzay ise birinci sayılabilir uzaydır.*

Teorem 1.5.31 (X, τ) *topolojik uzay ve $x \in X$ olmak üzere $\{U_1, U_2, ..., U_n, ...\}$ ailesi x noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı ise $x \in X$ noktasının iç-içe azalan bir $\{V_1, V_2, ..., V_n, ...\}$ komşuluklar tabanı vardır.*

İspat. Her $n \in \mathbb{N}$ için $V_{n+1} \subset V_n$ olacak şekilde bir $\{V_1, V_2, ..., V_n, ...\}$ komşuluklar tabanı olduğunu göstermeliyiz. $\{U_1, U_2, ..., U_n, ...\}$ ailesi yardımıyla

$$\begin{aligned} V_1 &= U_1 \\ V_2 &= U_1 \cap U_2 \\ &\vdots \\ V_n &= U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklinde elde edilen $\{V_1, V_2, ..., V_n, ...\}$ ailesi iç-içe azalan bir komşuluklar tabanı olur. □

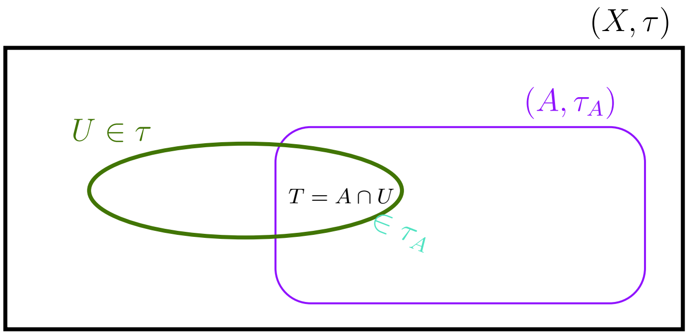
Sonuç 1.5.32 (X, τ) *uzayı birinci sayılabilir uzay ise $x \in X$ noktasının iç-içe azalan bir komşuluklar tabanı vardır.*

1.6 Alt Uzay

Tanım 1.6.1 (X, τ) *bir topolojik uzay ve* $A \subset X$ *olmak üzere,* A *kümesi üzerindeki*

$$\tau_A = \{A \cap U : U \in \tau\}$$

topolojisine A *kümesi üzerine indirgenen alt uzay topolojisi denir.* (A, τ_A) *topolojik uzayına da* (X, τ) *topolojik uzayının* ***alt uzayı*** *denir.*



$$T \in \tau_A \Leftrightarrow \exists U \in \tau \quad \ni T = A \cap U$$

Teorem 1.6.2 (X, τ) *topolojik uzay ve* $A \subset X$ *olmak üzere*

$$\tau_A = \{A \cap U \ : U \in \tau\}$$

ailesi, A *kümesi üzerinde bir topoloji belirtir.*

İspat. T_1. (X, τ) *bir topolojik uzay olduğundan* $\emptyset, X \in \tau$ *için*

$$A \cap \emptyset = \emptyset \in \tau_A$$

$$A \cap X = A \in \tau_A$$

elde edilir.

T_2. I *herhangi bir indis ailesi olmak üzere* $A_i \in \tau_A$ *olsun.* $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \tau_A$ *olduğunu gösterelim. Her* $i \in I$ *için* $A_i \in \tau_A$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned}
\forall i \in I, A_i \in \tau_A \quad &\Rightarrow \quad A_i = A \cap U_i \qquad \ni \forall i \in I, U_i \ \in \tau \\
&\Rightarrow \quad \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap U_i) \\
&\Rightarrow \quad \bigcup_{i \in I} A_i = A \cap \underbrace{\left(\bigcup_{i \in I} \underbrace{U_i}_{\in \tau} \right)}_{\in \tau} \\
&\Rightarrow \quad \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_A
\end{aligned}$$

elde edilir.

T_3. *$A_1, A_2 \in \tau_A$ için $A_1 \cap A_2 \in \tau_A$ olduğunu gösterelim. $A_1, A_2 \in \tau_A$ için*

$$\begin{aligned} A_1, A_2 \in \tau_A \quad &\Rightarrow \quad A_1 \cap A_2 = (A \cap U_1) \cup (A \cap U_2) \quad \ldots \left(\begin{array}{c} A_1 \in \tau_A \Rightarrow \exists U_1 \in \tau \ni A_1 = A \cap U_1 \\ A_2 \in \tau_A \Rightarrow \exists U_2 \in \tau \ni A_2 = A \cap U_2 \end{array} \right) \\ &\Rightarrow \quad A_1 \cap A_2 = A \cap \underbrace{(U_1 \cup U_2)}_{\in \tau} \\ &\Rightarrow \quad A_1 \cap A_2 \in \tau_A \end{aligned}$$

elde edilir. □

Örnek 1.6.3 *$X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde*

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}\}$$

topolojisi verilsin. Bu taktirde $A = \{b, d\}$ kümesi üzerindeki alt uzay topolojisini belirleyelim.

Çözüm: τ ailesine ait kümelerin A kümesi ile arakesitlerini bularak (A, τ_A) topolojik uzayının açık kümelerini elde edeceğiz. Buradan,

$$\emptyset \cap A = \emptyset, X \cap A = A, \{a\} \cap A = \emptyset, \{c\} \cap A = \emptyset, \{a, c\} \cap A = \emptyset, \{a, b\} \cap A = \{b\}$$

olduğundan

$$\tau_A = \{\emptyset, A, \{b\}\}$$

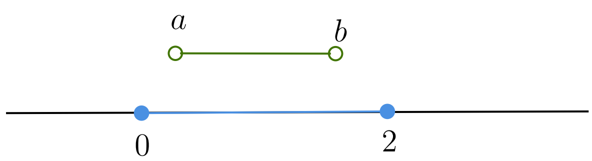
olur. Burada dikkat edilirse $\{b\} \in \tau_A$ alt uzayda açık kümedir ancak $\{b\} \notin \tau$ olduğundan $\{b\}$ kümesi (X, τ) topolojik uzayında açık küme değildir. □

Uyarı 1.6.4 *Alt uzayda açık olan bir küme üst uzayda açık küme olmayabilir.*

Örnek 1.6.5 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında $A = [0, 2]$ olmak üzere $(A, \mathcal{U}_A)$ alt uzayının açık kümelerini inceleyelim.*

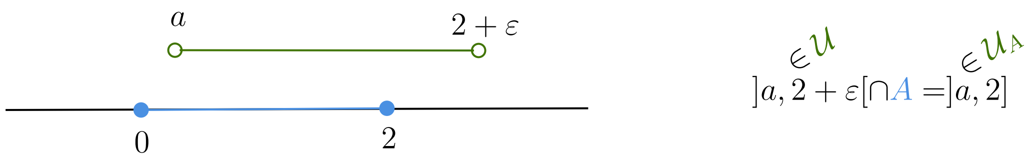
Çözüm:

- $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{U}$ için $\emptyset \cap A = \emptyset$ ve $\mathbb{R} \cap A = A = [0, 2]$ olduğundan $\emptyset, A \in \mathcal{U}_A$ elde edilir.
- $a > 0, b < 2,\ a < b$ olmak üzere $]a, b[\in \mathcal{U}$ ve $]a, b[\cap A =]a, b[$ olduğundan $]a, b[\in \mathcal{U}_A$ elde edilir.

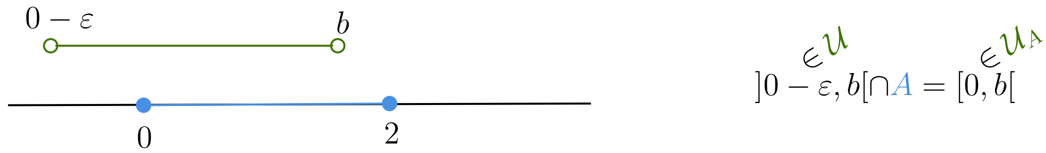


$$\overset{\in \mathcal{U}}{]a, b[} \cap A = \overset{\in \mathcal{U}_A}{]a, b[}$$

- $0 < a < 2, \varepsilon > 0$ olmak üzere $]a, 2+\varepsilon[\in \mathcal{U}$ ve $]a, b[\cap A =]a, b]$ olduğundan $]a, 2] \in \mathcal{U}_A$ elde edilir.



- $0 < b < 2, \varepsilon > 0$ olmak üzere $]0-\varepsilon, b[\in \mathcal{U}$ ve $]0-\varepsilon, b[\cap A = [0, b[$ olduğundan $[0, b[\in \mathcal{U}_A$ elde edilir.



$\square$

Örnek 1.6.6 *$(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayında $A = \{-1, +1\}$ olmak üzere $(A, \mathcal{U}_A)$ alt uzayının açık kümelerini inceleyelim.*

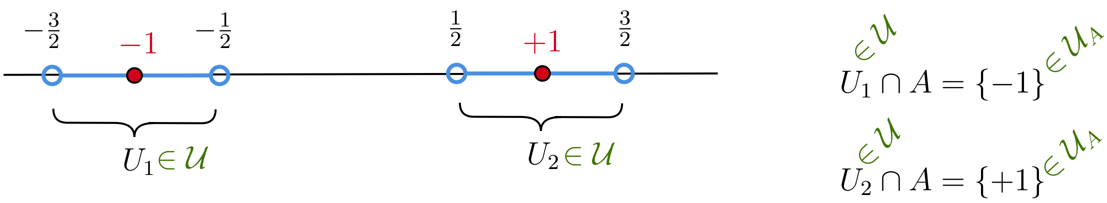
Çözüm: Öncelikle $\emptyset, A \in \mathcal{U}_A$ olacağı açıktır. $U_1 =]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}[, U_2 =]\frac{1}{2}, \frac{2}{2}[\in \mathcal{U}$ için

$$U_1 \cap A = \{-1\} \in \mathcal{U}_A$$

ve

$$U_2 \cap A = \{1\} \in \mathcal{U}_A$$

elde edilir.



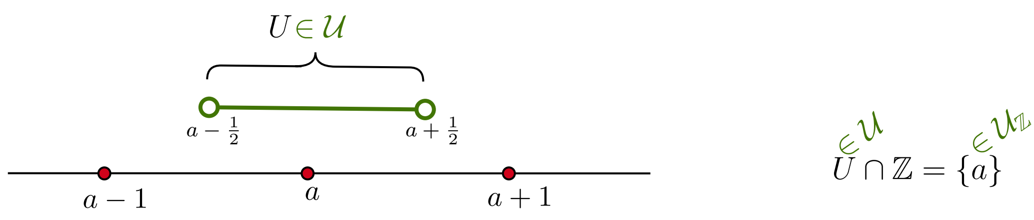
$(A, \mathcal{U}_A)$ uzayında her alt küme açık küme olduğundan $(A, \mathcal{U}_A)$ uzayı ayrık uzay olur. $\square$

Örnek 1.6.7 *$(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayında $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi üzerine indirgenen alt uzayın açık kümelerini inceleyelim.*

Çözüm: $a \in \mathbb{Z}$ noktasını alalım. $U =]a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}[\in \mathcal{U}$ kümesi $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayında açık küme ve

$$U = \left] a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2} \right[\cap \mathbb{Z} = \{a\}$$

olduğundan $\{a\} \in \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}$ elde ederiz.



Her $a \in \mathbb{Z}$ noktası için $\{a\} \in \mathcal{U}_{\mathbb{Z}}$ olduğundan $(\mathbb{Z}, \mathcal{U}_{\mathbb{Z}})$ uzayında her küme açık küme olur. Sonuç olarak $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış uzayından $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi üzerine indirgenen alt uzay $(\mathbb{Z}, \mathcal{U}_{\mathbb{Z}})$ ayrık uzaydır. □

Örnek 1.6.8 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *alışılmış uzayından* $\mathbb{N}$ *doğal sayılar kümesi üzerine indirgenen alt uzay* $(\mathbb{N}, \mathcal{U}_{\mathbb{N}})$ *ayrık uzaydır.* ✎

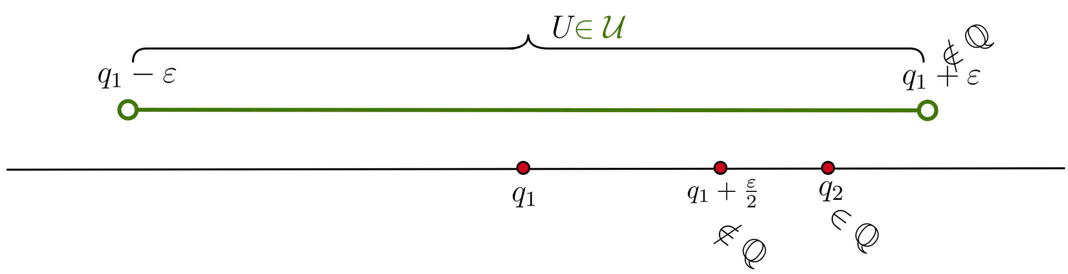
Örnek 1.6.9 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında* $\mathbb{Q}$ *rasyonel sayılar kümesi üzerine indirgenen alt uzayın ayrık uzay olmadığını gösterelim.*

Çözüm: $q_1 \in \mathbb{Q}$ noktasını alalım. $\varepsilon > 0$ olmak üzere bir $U =]q_1 - \varepsilon, q_1 + \varepsilon[\in \mathcal{U}$ açık kümesi için

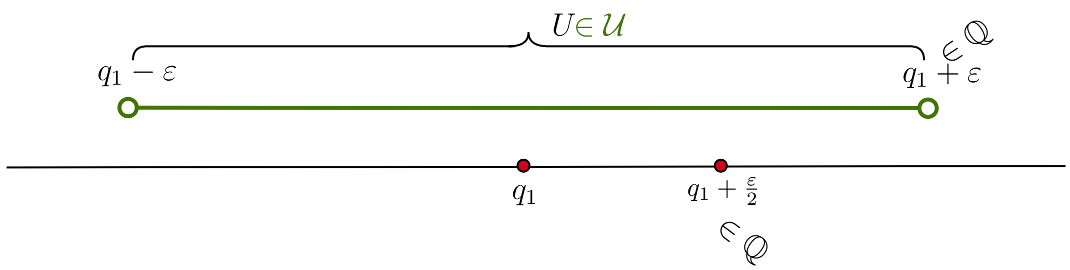
$$U \cap \mathbb{Q} \neq \{q_1\}$$

olduğunu göstermeliyiz. $\exists q_2 \in \mathbb{Q}$ için $q_2 \in U$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

I.Durum: $q_1 + \varepsilon \notin \mathbb{Q}$ ise $q_1 + \dfrac{\varepsilon}{2} \notin \mathbb{Q}$ olur. Her iki irrasyonel sayının arasında en az bir tane rasyonel sayı olacağından $q_1 + \varepsilon, q_1 + \dfrac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{Q}^t$ irrasyonel sayılar için $q_1 + \dfrac{\varepsilon}{2} < q_2 < q_1 + \varepsilon$ olacak şekilde $q_2 \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayısı vardır ve $q_1 - \varepsilon < q_2 < q_1 + \varepsilon$ olduğundan $q_2 \in U$ elde edilir.



II.Durum: $q_1 + \varepsilon \in \mathbb{Q}$ ise $q_1 + \dfrac{\varepsilon}{2} \in \mathbb{Q}$ olur. $q_1 < q_1 + \dfrac{\varepsilon}{2} < q_1 + \varepsilon$ olduğundan $q_1 + \dfrac{\varepsilon}{2} \in U$ elde edilir.



□

Örnek 1.6.10 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında* $\mathbb{Q}^t$ *irrasyonel sayılar kümesi üzerine indirgenen alt uzay ayrık uzay değildir.* ✎

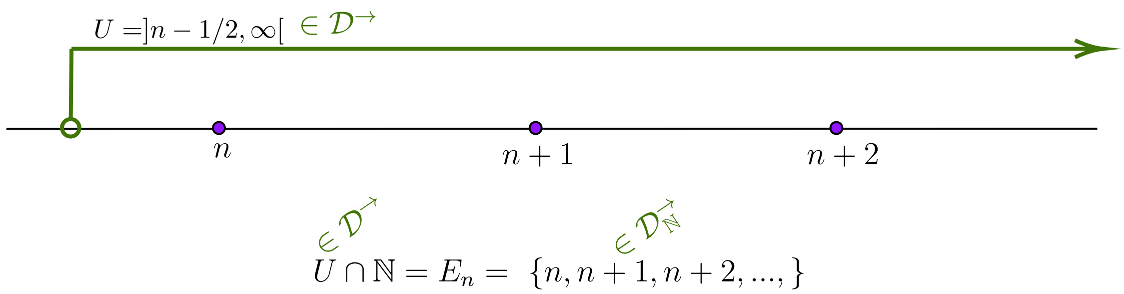
Örnek 1.6.11 $(\mathbb{R}, \mathcal{D}^{\rightarrow})$ *sağ ışın uzayında* $\mathbb{N}$ *doğal sayılar kümesi üzerine indirgenen alt uzayın açık kümelerini inceleyelim.*

Çözüm:

- $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{D}^{\rightarrow}$ için $\emptyset \cap \mathbb{N} = \emptyset$ ve $\mathbb{R} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$ olduğundan $\emptyset, \mathbb{N} \in \mathcal{D}^{\rightarrow}_{\mathbb{N}}$ elde edilir.
- $n \in \mathbb{N}$ alalım. $U =]n - \frac{1}{2}, \infty[\in \mathcal{D}^{\rightarrow}$ açık kümesi için

$$U \cap \mathbb{N} = \{n, n+1, n+2, ..., \} = E_n$$

olduğundan $E_n = \{n, n+1, n+2, ..., \} \in \mathcal{D}^{\rightarrow}_{\mathbb{N}}$ elde edilir.



□

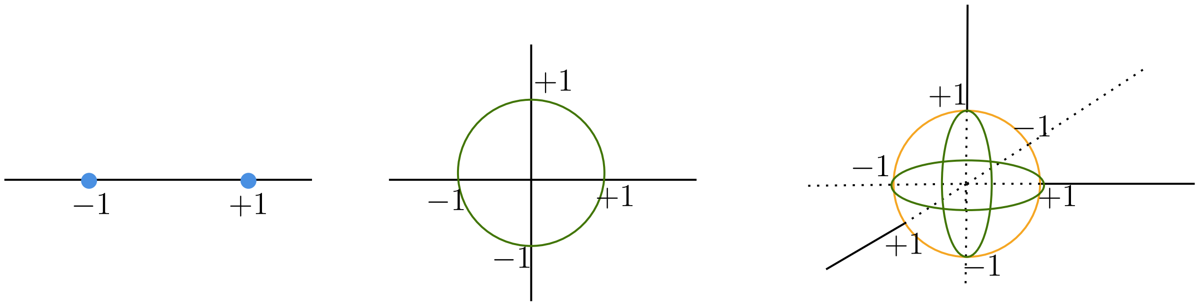
Not. $(\mathbb{R}, \mathcal{D}^{\rightarrow})$ sağ ışın uzayından $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerine indirgenen alt uzay Örnek 1.1.18 de incelediğimiz $(\mathbb{N}, \tau_{\mathbb{N}})$ topolojik uzayıdır. □

Tanım 1.6.12 *Her* $n \in \mathbb{N}$ *doğal sayısı için,* r *yarıçaplı bir* n***-küre*** *,* r *noktasının* $n+1$ *boyutlu Öklidyen uzayda sabit bir* c *noktasına uzaklığı* r *olan noktalardan oluşan bir küme olarak tanımlanır. Burada* r *herhangi bir pozitif reel sayı ve* c*,* $(n+1)$ *boyutlu uzayın herhangi bir noktası olabilir.*

Tanım 1.6.13 *Verilen bir kartezyen koordinat sistemi için, yarıçapı 1 olan n-boyutlu bir birim küre orjine olan uzaklığı 1 olan noktaların kümesi*

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}.$$

olarak tanımlanır.



S^0 S^1 S^2

Örnek 1.6.14 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *alışılmış uzayından* S^0 *kümesi üzerine indirgenen alt uzay* $(S^0, \mathcal{U}_{S^0})$ *ayrık uzaydır.* ✎

Örnek 1.6.15 $(\mathbb{R}, \overleftarrow{\mathcal{D}})$ *sol ışın uzayından* $\mathbb{N}$ *doğal sayılar kümesi üzerine indirgenen alt uzayın açık kümeleri,* $(\mathbb{N}, \tau_{\mathbb{N}})$ *topolojik uzayının kapalı kümeleridir.* ✎

Teorem 1.6.16 (X, τ) *bir topolojik uzay ve* $A \subset X$ *için* (A, τ_A) *alt uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $\mathcal{B}$ *ailesi* τ *topolojisinin bir tabanı ise*

$$\mathcal{B}_A = \{A \cap B : B \in \mathcal{B}\}$$

ailesi τ_A *topolojisinin bir tabanı olur.*

(ii) $\mathcal{S}$ *ailesi* τ *topolojisinin bir alt tabanı ise*

$$\mathcal{S}_A = \{A \cap S : S \in \mathcal{S}\}$$

ailesi τ_A *topolojisinin bir alt tabanı olur.*

(iii) *Her* $x \in A$ *noktası için*

$$\vartheta_A(x) = \{A \cap V : V \in \vartheta_{(x)}\}$$

ailesi $x \in A$ *noktasının* (A, τ_A) *uzayındaki komşuluklarının ailesidir.*

(iv) *Her* $x \in A$ *noktası için*

$$\mathcal{G}_A(x) = \{A \cap W : W \in \mathcal{G}(x)\}$$

ailesi $x \in A$ *noktasının* (A, τ_A) *uzayındaki komşuluklarının bir tabanıdır.*

İspat. (**i**) $T \in \tau_A$ olsun. T kümesinin $\mathcal{B}_A$ ailesine ait kümelerin birtakım birleşimi olarak yazılabileceğini gösterelim. $T \in \tau_A$ için

$$
\begin{aligned}
T \in \tau_A \quad &\Rightarrow \quad \exists U \in \tau \ \ni T = A \cap U \\
&\Rightarrow \quad T = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \qquad \ldots \left(U \in \tau \Rightarrow U = \bigcup_{i \in I} B_i \quad \ni B_i \ \in \mathcal{B} \right) \\
&\Rightarrow \quad T = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i) \qquad \ldots (i \in I, A \cap B_i \in \mathcal{B}_A)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(**ii**) $T \in \tau_A$ olsun. T kümesinin $\mathcal{S}_A$ ailesine ait kümelerin sonlu arakesitlerinin birtakım birleşimi olarak yazılabileceğini gösterelim. $T \in \tau_A$ için

$$
\begin{aligned}
T \in \tau_A \quad &\Rightarrow \quad \exists U \in \tau \ \ni T = A \cap U \\
&\Rightarrow \quad T = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j=1}^{n} S_{ji} \right) \right) \qquad \ldots \left(U \in \tau \Rightarrow U = \left(\bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j=1}^{n} S_{ji} \right) \right) \quad \ni S_i \ \in \mathcal{B} \right) \\
&\Rightarrow \quad T = \left(\bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j=1}^{n} (A \cap S_{ji}) \right) \right) \qquad \ldots (i \in I, A \cap S_{ji} \in \mathcal{B}_A)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(**iii**) $x \in A$ olsun. $A \cap V$ kümesinin $x \in A$ noktasının (A, τ_A) uzayında bir komşuluğu olması için en az bir $U \in \tau_A$ açık kümesi için $x \in U \subset A \cap V$ olmalıdır. $V \in \vartheta_{(x)}$ için

$$
\begin{aligned}
V \in \vartheta_{(x)} \quad &\Rightarrow \quad \exists U \in \tau \quad \ni x \in U \subset V \\
&\Rightarrow \quad x \in A \cap U \subset A \cap V \qquad \ldots (B \subset C \Rightarrow A \cap B \subset A \cap C) \\
&\Rightarrow \quad A \cap V \in \vartheta_A(x) \qquad \ldots (U \in \tau, A \cap U \in \tau_A)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(**iv**) $x \in A$ olsun. $\mathcal{G}_A$ ailesinin $x \in A$ noktasının (A, τ_A) uzayında bir komşuluk tabanı olması için $x \in A$ noktasının (A, τ_A) uzayındaki her $A \cap V$ komşuluğu için $x \in W \subset A \cap V$ olacak şekilde bir en az bir $W \in \mathcal{G}_A$ olmasıdır. $V \in \vartheta_{(x)}$ için

$$
\begin{aligned}
V \in \vartheta_{(x)} \quad &\Rightarrow \quad \exists U \in \tau \quad \ni x \in U \subset V \\
&\Rightarrow \quad \exists W \in G \quad \ni x \in W \subset V \qquad \ldots (\mathcal{G} \text{ komşuluk tabanı}) \\
&\Rightarrow \quad x \in A \cap W \subset A \cap V \qquad \ldots (B \subset C \Rightarrow A \cap B \subset A \cap C) \\
&\Rightarrow \quad A \cap W \in G_A(x) \qquad \ldots (A \cap V \in \vartheta_{(x)})
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\square$

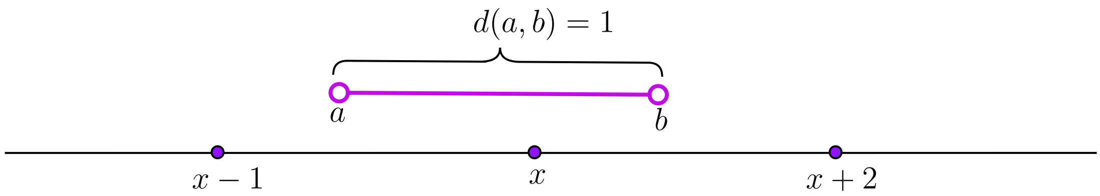
Örnek 1.6.17 $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *alışılmış uzayı için* $(\mathbb{Z},\mathcal{U}_Z)$ *alt uzayı ayrık uzaydır (örnek* 1.6.7*).* (X,τ) *ayrık uzay ise her* $\{x\}$ *tek nokta kümesini içeren aile* (X,τ) *uzayı için bir taban olur (örnek 1.5.6). Böylece* $(\mathbb{Z},\mathcal{U}_Z)$ *uzayının bir tabanı*

$$\mathcal{B}_{\mathbb{Z}} = \{\{x\} : x \in \mathbb{Z}\}$$

ailesi olur. Şimdi $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ *ailesinin* $(\mathbb{Z},\mathcal{U}_Z)$ *uzayının bir tabanı olduğunu teorem* 1.6.16 *kullanarak gösterelim.* $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında*

$$\mathcal{B} = \{]a,b[: a,b \in \mathbb{R}, a < b, d(a,b) = 1\}$$

ailesi bir tabandır. Buradan



$$\mathcal{B} \cap \mathbb{Z} = \mathcal{B}_{\mathbb{Z}} = \{\{x\} : x \in \mathbb{Z}\}$$

elde edilir.

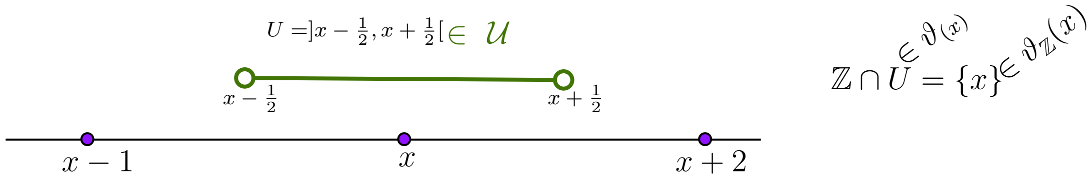
Örnek 1.6.18 $(\mathbb{Z},\mathcal{U}_Z)$ *uzayında bir* $x \in \mathbb{Z}$ *noktasının komşuluklarını inceleyelim.* $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında* $U =]x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}[\in \mathcal{U}$ *açık kümesi için* $x \in U \subset U$ *olduğundan* $U \in \vartheta_{(x)}$ *olur.* $\mathbb{Z}$ *kümesi ile arakesit alınırsa*

$$x \in \mathbb{Z} \cap U \subset \mathbb{Z} \cap U$$

ve

$$\mathbb{Z} \cap U = \{x\}$$

olacağından $\{x\} \in \vartheta_{\mathbb{Z}}(x)$ *elde ederiz. Bir komşuluğu kapsayan her küme komşuluk olacağından* $x \in V$ *olacak şekilde her* $V \subset \mathbb{Z}$ *kümesi komşuluk olur.*



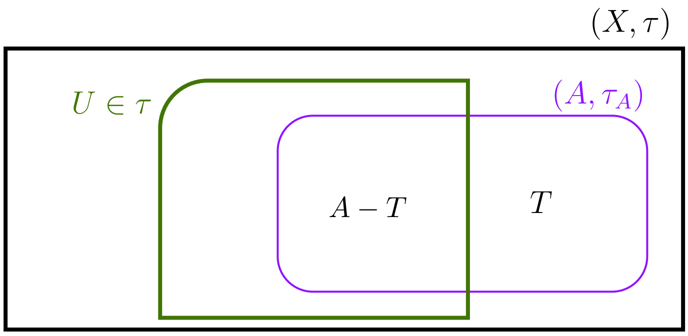
Teorem 1.6.19 (X,τ) *topolojik uzay ve* $A \subset X$ *olmak üzere* (A,τ_A) *alt uzayı verilsin. Bir* $T \subset A$ *alt kümesinin* (A,τ_A) *uzayında kapalı küme olması için gerek ve yeter şart* $T = A \cap F$ *olacak şekilde en az bir* $F \subset X$ *kapalı kümesinin olmasıdır.*

$$T \subset A,\ T \in \tau_A^t \iff \exists F \in \tau^t \ \ni T = A \cap F$$

İspat. $\Rightarrow$ T kümesi (A,τ_A) uzayında kapalı küme olsun. Buradan

$$\begin{aligned} T\in\tau_A^t &\Rightarrow A-T\in\tau_A \\ &\Rightarrow \exists U\in\tau \quad \ni A-T=A\cap U \end{aligned}$$

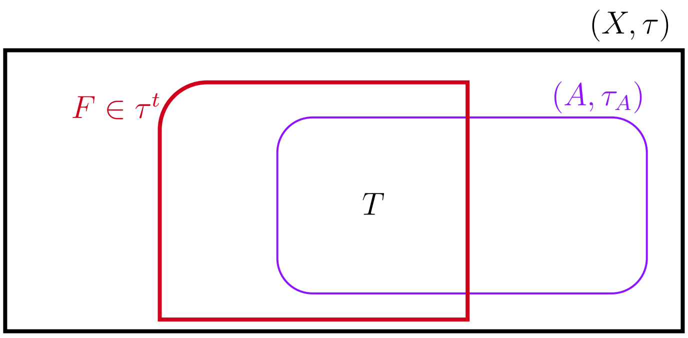
elde edilir.



$$\overset{\in\tau_A^t}{T} = A\cap \overset{\in\tau^t}{(X-U)}$$

T kümesini $T = A\cap(X-U)$ şeklinde yazabiliriz. Buradan $U\in\tau$ için $X-U\in\tau^t$ olduğundan, T kümesi (X,τ) uzayının bir kapalı kümesi $F = X-U$ ile A kümesinin arakesiti olarak elde edilir. Sonuç olarak $T\in\tau_A^t$ olur.

$\Leftarrow$ $F\in\tau^t$ kapalı küme olmak üzere $T = A\cap F$ olsun. Buradan



$$\overset{\in\tau_A}{A-T} = A\cap\overset{\in\tau}{(X-F)}$$

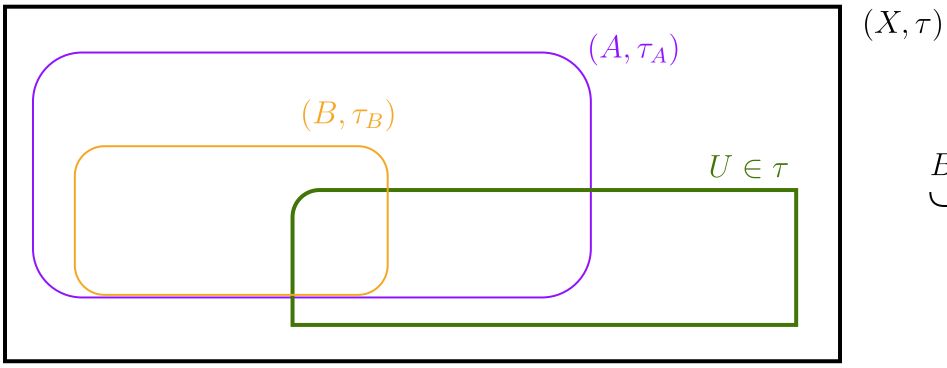
$$F \in\tau^t \Longrightarrow (X-F)\in\tau$$

$$\begin{aligned} A-T &= A-(A\cap F) && \ldots(T=A\cap F) \\ &= A\cap(X-F) \\ &\Rightarrow A-T\in\tau_A && \ldots(X-F\in\tau_A^t) \\ &\Rightarrow T\in\tau_A^t \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Lemma 1.6.20 *(X,τ) bir topolojik uzay ve $B\subset A\subset X$ olmak üzere (X,τ) topolojisinden B kümesine indirgenen topoloji (A,τ_A) topolojisinden B kümesine indirgenen topolojiye eşittir.*

İspat. $(A \cap B) \cap U \neq \emptyset$ olacak şekilde her $U \in \tau$ açık kümesi için,



$$\underbrace{B \cap \overset{\in\tau}{U}}_{\in \tau_B} = \underbrace{B \cap (\overbrace{A \cap U}^{\in \tau_A})}_{\in (\tau_A)_B}$$

$$B \cap U = (B \cap A) \cap U = B \cap (A \cap U)$$

olduğundan $\tau_B = (\tau_A)_B$ elde edilir. □

Tanım 1.6.21 (X, τ) *topolojik uzayında bulunan bir* (p) *özelliği her* $A \subset X$ *alt kümesi için* (A, τ_A) *uzayında da bulunuyorsa bu özelliğe* ***kalıtsal özellik*** *denir.*

Örnek 1.6.22 $(X, \tau = \mathcal{P}(X))$ *ayrık uzay ve* $A \subset X$ *alt küme olmak üzere her* $x \in A$ *için*

$$A \cap \overset{\in\tau}{\{x\}} = \{x\} \ \in \tau_A$$

olacağından (A, τ_A) *ayrık uzay olur. Sonuç olarak ayrık uzay olma özelliği kalıtsal bir özelliktir.*

Bölüm 2

TÜREV KÜMELERİ

2.1 Bir Kümenin İçi

Tanım 2.1.1 (X,τ) *topolojik uzay ve* $A \subset X$ *olmak üzere* A *kümesi* x *noktasının bir komşuluğu ise* x *noktasına* A *kümesinin bir* ***iç noktasıdır*** *denir.* A *kümesinin bütün iç noktalarından oluşan kümeye* A ***kümesinin içi*** *denir ve* $\overset{\circ}{A}$ *ile gösterilir.*

$$\begin{aligned} x \in \overset{\circ}{A} &\iff \exists U \in \tau \ni x \in U \subset A \\ &\iff A \in \vartheta_{(x)} \end{aligned}$$

Örnek 2.1.2 $X = \{a,b,c,d\}$ *kümesi üzerinde*

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}\}$$

ailesi bir topoloji belirtir. $A = \{b,c,d\}$ *kümesinin hangi noktalarının iç nokta olduğunu inceleyelim.*

- $b \in A$ *noktası için* b *noktasını içeren açık kümeler* $U = \{a,b\}, \{a,b,c\}, X$ *için* $U \nsubseteq A$ *olduğundan* $b \notin \overset{\circ}{A}$ *elde edilir.*
- $c \in A$ *noktası için* $c \in U = \{c\} \in \tau$ *açık küme ve* $U \subset A$ *olduğundan* $c \in \overset{\circ}{A}$ *elde edilir.*
- $d \in A$ *noktası için* $d \in U = \{c,d\} \in \tau$ *açık küme ve* $U \subset A$ *olduğundan* $d \in \overset{\circ}{A}$ *elde edilir.*

Sonuç olarak $\overset{\circ}{A} = \{c,d\}$ *olarak bulunur.*

Uyarı 2.1.3 (X,τ) *topoloji uzay ve* $A \subset X$ *ve* $x \notin A$ *olsun.* x *noktasını içeren bir* $U \in \tau$ *açık kümesi için* $U \nsubseteq A$ *olacağından* $x \notin \overset{\circ}{A}$ *elde edilir.*

Sonuç 2.1.4 *Kümeye ait olmayan noktalar iç nokta olamaz.*

$$x \notin A \Rightarrow x \notin \mathring{A}$$

Örnek 2.1.5 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında*

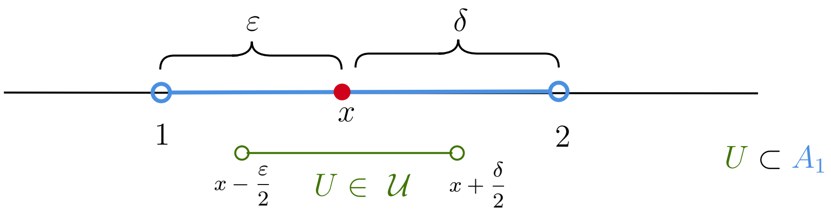
$$A_1 =]1,2[, \;\; A_2 =]1,2], \;\; A_3 = [1,2[, \;\; A_4 = [1,2]$$

kümelerinin iç noktalarını inceleyelim.

- $1 < x < 2$ *için,* $x \neq 1$ *ve* $x \neq 2$ *olduğundan* $d(1,x) = \varepsilon$ *ve* $d(x,2) = \delta$ *olacak şekilde* $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ *vardır.* $U = \left]x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\delta}{2}\right[\in \mathcal{U}$ *açık kümesi için* $U \subset A_1$ *olduğundan*

$$\mathring{A}_1 =]1,2[$$

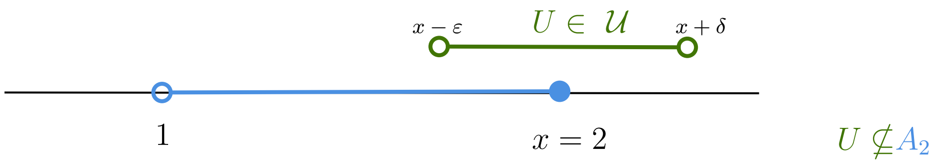
elde edilir.



- $1 < x < 2$ *için* $x \in \mathring{A}_2$ *elde edilir.* $x = 2$ *noktası için inceleyelim.* $\varepsilon, \delta > 0$ *olmak üzere* $U =]x - \varepsilon, x + \delta[\in \mathcal{U}$ *açık kümesi için* $U \not\subseteq A_2$ *olduğundan* $x \notin \mathring{A}_2$ *olur. Sonuç olarak*

$$\mathring{A}_2 =]1,2[$$

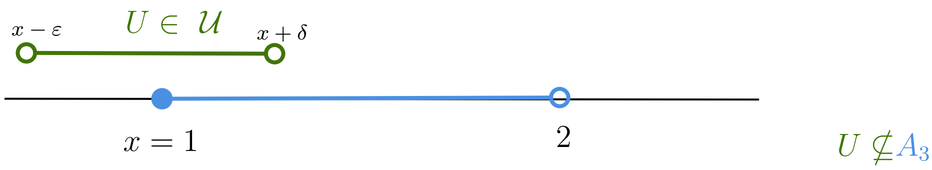
elde edilir.



- $1 < x < 2$ *için* $x \in \mathring{A}_3$ *elde edilir.* $x = 1$ *noktası için inceleyelim.* $\varepsilon, \delta > 0$ *olmak üzere* $U =]x - \varepsilon, x + \delta[\in \mathcal{U}$ *açık kümesi için* $U \not\subseteq A_3$ *olduğundan* $x \notin \mathring{A}_3$ *olur. Sonuç olarak*

$$\mathring{A}_3 =]1,2[$$

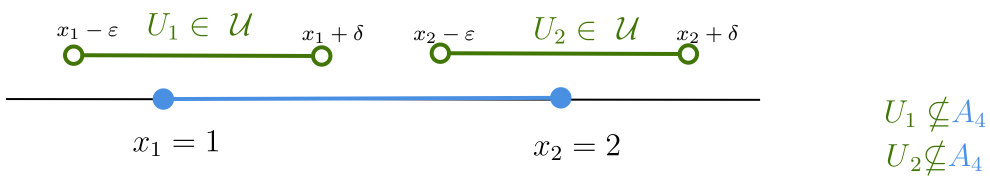
elde edilir.



- $1 < x < 2$ *için* $x \in \mathring{A}_4$ *elde edilir.* $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ *noktaları için inceleyelim.* $\varepsilon, \delta > 0$ *olmak üzere* $U_1 =]x_1 - \varepsilon, x_1 + \delta[\,, U_1 =]x_2 - \varepsilon, x_2 + \delta[\, \in \mathcal{U}$ *açık kümeleri için* $U_1 \nsubseteq A_4$ *ve* $U_2 \nsubseteq A_4$ *olduğundan* $x_1, x_2 \notin \mathring{A}_4$ *olur. Sonuç olarak*

$$\mathring{A}_4 =]1, 2[$$

elde edilir.



Sonuç 2.1.6 *Farklı kümelerin içleri eşit olabilir.*

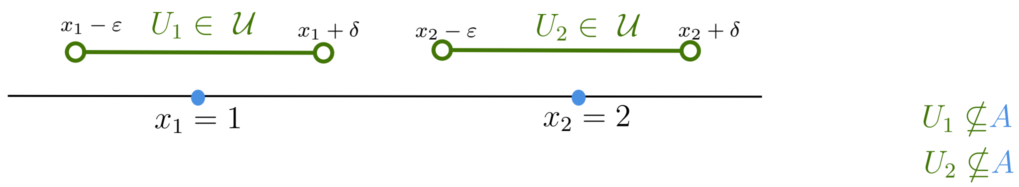
Örnek 2.1.7 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında* $A = \{1, 2\}$ *kümesinin iç noktalarını inceleyelim.*

Çözüm:

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$ noktaları için $\varepsilon, \delta > 0$ olmak üzere $U_1 =]x_1 - \varepsilon, x_1 + \delta[\,$, $U_2 =]x_2 - \varepsilon, x_2 + \delta[\, \in \mathcal{U}$ açık kümeleri için $U_1 \nsubseteq A$ ve $U_2 \nsubseteq A$ olduğundan $x_1, x_2 \notin A$ olur. Sonuç olarak

$$\mathring{A} = \emptyset$$

elde edilir.



□

Sonuç 2.1.8 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında sonlu bir* A *kümesi sonlu sayıda tek nokta kümelerinin birleşimi olduğundan,* $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında* A *kümesinin içi boş küme olur.*

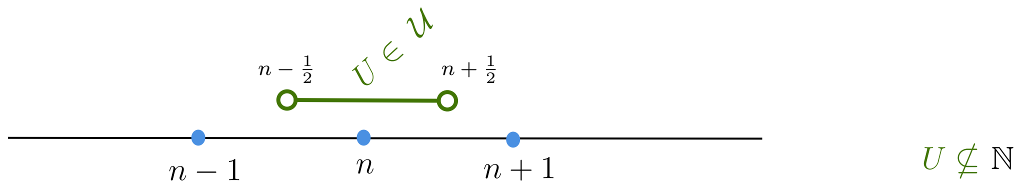
$$(\mathbb{R}, \mathcal{U}), A \subset \mathbb{R} \text{ ve } A \text{ sonlu} \Rightarrow \mathring{A} = \emptyset$$

Uyarı 2.1.9 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında bir kümenin içinin boş küme olması kümenin sonlu olmasını gerektirmez.*

Örnek 2.1.10 $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında* $\mathbb{N}$ *doğal sayılar kümesinin iç noktalarını inceleyelim.* $n \in \mathbb{N}$ *noktası için* $U = \left]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right[\in \mathcal{U}$ *açık küme olmak üzere* $U \nsubseteq \mathbb{N}$ *olduğundan* $x \notin \mathring{\mathbb{N}}$ *olur. Her* $n \in \mathbb{N}$ *noktası için sağlanacağından sonuç olarak*

$$\mathring{\mathbb{N}} = \emptyset$$

elde edilir.



Örnek 2.1.11 $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında* $\mathbb{Z}$ *tam sayılar kümesinin hiçbir noktası iç nokta değildir.* $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında*

$$\mathring{\mathbb{Z}} = \emptyset$$

olur.

Örnek 2.1.12 $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında* $\mathbb{Q}$ *rasyonel sayılar kümesi kendisine ait hiçbir noktanın komşuluğu değildir. Gerçekten de* $\varepsilon, \delta > 0$ *olmak üzere her* $x \in \mathbb{Q}$ *noktasını içeren* $U =]x - \varepsilon, x + \delta[\in \mathcal{U}$ *açık kümesi en az bir irrasynel sayı içereceğinden* $U \nsubseteq \mathbb{Q}$ *olur. Buradan*

$$\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$$

elde edilir.

Örnek 2.1.13 $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında* $\mathbb{Q}^t$ *irrasyonel sayılar kümesi kendisine ait hiçbir noktanın komşuluğu değildir.* $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında*

$$\mathring{\mathbb{Q}^t} = \emptyset$$

elde olur.

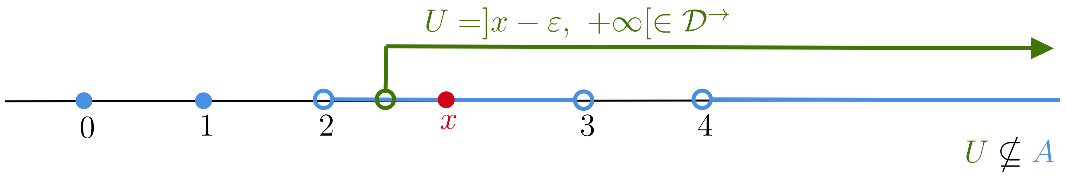
Sonuç 2.1.14 $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında sonlu olmayan* $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^t$ *kümeleri için*

$$\mathring{\mathbb{N}} = \mathring{\mathbb{R}} = \mathring{\mathbb{Q}} = \mathring{\mathbb{Q}^t} = \emptyset$$

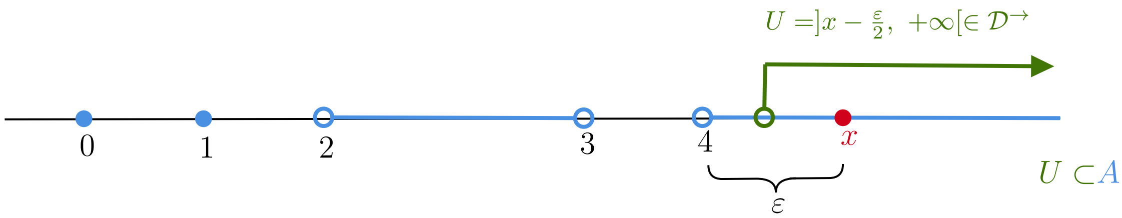
elde edilir.

Örnek 2.1.15 $(\mathbb{R}, \mathcal{D}^{\rightarrow})$ *uzayında* $A = \{0, 1\} \cap]2, 3[\cap]4, +\infty[$ *kümesinin iç noktalarını inceleyelim.*

- *$x \in A$ ve $x < 4$ olsun. $\varepsilon > 0$ olmak üzere x noktasını içeren açık küme $U =]x-\varepsilon, +\infty[\in \mathcal{D}^{\rightarrow}$ şeklindedir. En az bir $\varepsilon > 0$ için $4-\varepsilon \in U$ ve $4-\varepsilon \notin A$ olduğundan $U \nsubseteq A$ elde edilir. Buradan $x \in A$ ve $x < 4$ için $x \notin \overset{\circ}{A}$ olur.*



- *$x > 4$ olsun. $x \neq 4$ olduğundan $d(4, x) = \varepsilon$ olacak şekilde ε reel sayısı vardır. $U =]x - \frac{\varepsilon}{2}, +\infty[\in \mathcal{D}^{\rightarrow}$ açık kümesi için $x \in U \subset A$ olduğundan $x > 4$ için $x \in \overset{\circ}{A}$ elde edilir.*



Sonuç olarak $(\mathbb{R}, \mathcal{D}^{\rightarrow})$ uzayında $A = \{0, 1\} \cap]2, 3[\cap]4, +\infty[$ kümesi için

$$\overset{\circ}{A} =]4, +\infty[$$

elde edilir.

Uyarı 2.1.16 *Bir kümenin içi uzayın üzerinde tanımlanan topolojiye bağlı olarak değişebilir. Birden fazla topoloji tanımlanması durumunda karışıklık olmaması için kümenin sağ alt tarafına hangi topolojiye göre olduğu belirtilir. Örneğin $A = \{0, 1\} \cap]2, 3[\cap]4, +\infty[$ kümesi için,*

$$\overset{\circ}{A}_{\mathcal{D}^{\rightarrow}} =]4, +\infty[\qquad \overset{\circ}{A}_{\mathcal{U}} =]2, 3[\cup]4, +\infty[$$

olarak yazılır.

Not. $(\mathbb{R}, \mathcal{D}^{\rightarrow})$ uzayında açık kümeler $]\lambda, +\infty[\in \mathcal{D}^{\rightarrow}$ şeklinde olduğundan bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin en az bir noktasının iç nokta olması için gerek ve yeter şart A kümesinin soldan açık bir sonsuz yarı açık içermesidir.

$$(\mathbb{R}, \mathcal{D}^{\rightarrow}), A \subset \mathbb{R} \text{ için } \overset{\circ}{A} \neq \emptyset \iff \exists\ ]a, +\infty[\quad \ni]a, +\infty[\subset A$$

$\square$

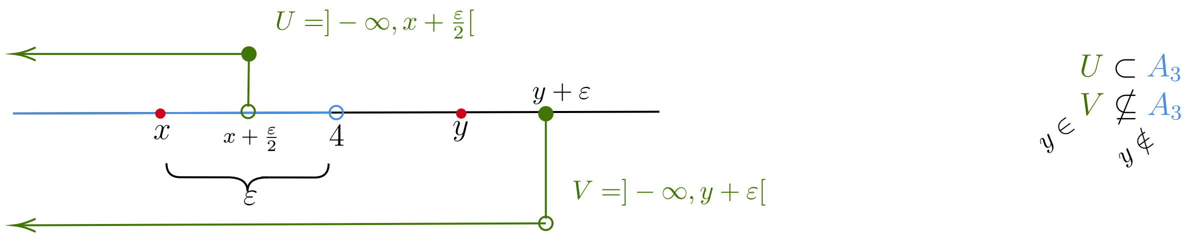
Örnek 2.1.17 $(\mathbb{R}, ^{\leftarrow}\mathcal{D})$ *uzayında* $A_1 = \{0, 1\}$, $A_2 =]2, 3[$, $A_3 =]-\infty, 4[$ *kümelerinin iç noktalarını inceleyelim.*

- $(\mathbb{R}, ^{\leftarrow}\mathcal{D})$ *uzayında bir* $U =]-\infty, \lambda[$ *açık kümesi için* $U \not\subset A_1$ *ve* $U \not\subset A_2$ *olduğundan*

$$\overset{\circ}{A}_1 = \overset{\circ}{A}_2 = \emptyset$$

elde edilir.

- $x < 4$ *olsun.* $x \neq 4$ *olduğundan* $d(x, 4) = \varepsilon > 0$ *olacak şekilde* $\varepsilon \in \mathbb{R}$ *reel sayısı vardır.* $U =]-\infty, x + \frac{\varepsilon}{2}[\in ^{\leftarrow}\mathcal{D}$ *açık kümesi için* $x \in U \subset A_3$ *olduğundan* $x < 4$ *için* $x \in \overset{\circ}{A}_3$ *elde edilir.*



$y \geqslant 4$ *olsun.* $\varepsilon > 0$ *olmak üzere* $V =]-\infty, 4 + \varepsilon[\in ^{\leftarrow}\mathcal{D}$ *açık kümesi için* $V \not\subset A_3$ *olduğundan* $y \geqslant 4$ *için* $y \notin \overset{\circ}{A}_3$ *elde edilir. Sonuç olarak* $(\mathbb{R}, ^{\leftarrow}\mathcal{D})$ *uzayında*

$$\overset{\circ}{A}_3 =]-\infty, 4[$$

olarak bulunur.

Teorem 2.1.18 (X, τ) *bir topolojik uzay ve* $A \subset X$ *olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $\overset{\circ}{A}$ *kümesi* A *kümesinin kapsadığı bütün açık kümelerin birleşimine eşittir.*

(ii) $\overset{\circ}{A} \subset A$

(iii) $\overset{\circ}{A} \in \tau$

(iv) $\overset{\circ}{A}$ *kümesi* A *kümesinin kapsadığı en büyük açık kümedir.*

(v) $A \in \tau \iff \overset{\circ}{A} = A$

İspat. **(i)** A kümesinin kapsadığı bütün açık kümelerin birleşimi

$$G = \bigcup_{\substack{T \in \tau \\ T \subset A}} T$$

ile gösterelim. $G = \overset{\circ}{A}$ olduğunu göstermeliyiz. $x \in \overset{\circ}{A}$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} x \in \overset{\circ}{A} &\Rightarrow \exists T \in \tau \ \ni x \in T \subset A \\ &\Rightarrow x \in G && \text{...} (T \subset G) \\ &\Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset G && (1) \end{aligned}$$

elde edilir. Tersine $y \in G$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} y \in G &\Rightarrow \exists T \in \tau \ \ni y \in T && \text{...} (G = \bigcup T) \\ &\Rightarrow y \in T \subset A && \text{...} (T \subset A) \\ &\Rightarrow y \in \overset{\circ}{A} \\ &\Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset G && (2) \end{aligned}$$

elde edilir. (1) ve (2) ifadelerinden

$$G = \overset{\circ}{A}$$

elde edilir.

(**ii**) $x \in \overset{\circ}{A}$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} x \in \overset{\circ}{A} &\Rightarrow \exists T \in \tau \ \ni x \in T \subset A \\ &\Rightarrow x \in A \\ &\Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset A \end{aligned}$$

elde edilir.

(**iii**) (i) den $\overset{\circ}{A}$ kümesi kapsadığı bütün açık kümelerin birleşimi

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{T \in \tau \\ T \subset A}} T$$

olarak yazılabilir. Açık kümelerin herhangi birleşimi açık küme olacağından $\overset{\circ}{A} \in \tau$ olur.

(**iv**) (i) ifadesinden A kümesinin kapsadığı bütün açık kümeler $\overset{\circ}{A}$ kümesinin alt kümesi olur. $T \in \tau$ ve $T \subset A$ için

$$T \in \tau \overset{(i)}{\Longrightarrow} T \subset \overset{\circ}{A}$$

olur. (iii) ifadesinden $\overset{\circ}{A}$ açık küme olacağından $\overset{\circ}{A}$ kümesi A kümesinin kapsadığı en büyük açık küme olur.

(**v**) $\Rightarrow$ $A \in \tau$ olsun. (i) ifadesinden $A \subset \overset{\circ}{A}$ olur. Ayrıca (ii) ifadesinden $\overset{\circ}{A} \subset A$ olduğundan

$$A = \overset{\circ}{A}$$

elde edilir.

$\Leftarrow$ Tersine $A = \overset{\circ}{A}$ olsun. (iii) ifadesinden $\overset{\circ}{A} \in \tau$ olduğundan $A \in \tau$ elde edilir. $\square$

Teorem 2.1.19 (X, τ) *bir topolojik uzay ve* $A, B \subset X$ *olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(**i**) $\overset{\circ}{X} = X$ *ve* $\overset{\circ}{\emptyset} = \emptyset$

(**ii**) $\overset{\circ\circ}{A} = \overset{\circ}{A}$

(**iii**) $A \subset B \implies \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$

(**iv**) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset (A \cup B)^{\circ}$

(**v**) $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = (A \cap B)^{\circ}$

İspat. (**i**) $\emptyset, X \in \tau$ ve açık kümelerin içi kendisine eşit olduğundan

$$\overset{\circ}{X} = X \text{ ve } \overset{\circ}{\emptyset} = \emptyset$$

elde edilir.

(**ii**) $A \subset X$ için $\overset{\circ}{A} \in \tau$ ve

$$\square \in \tau \implies \overset{\circ}{\square} = \square$$

olduğundan $\square = \overset{\circ}{A}$ alınırsa

$$\overset{\circ\circ}{A} = \overset{\circ}{A}$$

elde edilir.

(**iii**) $A \subset B$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} A \subset B \quad &\Rightarrow \quad \overset{\circ}{A} \subset B \qquad\qquad \ldots \left(\overset{\circ}{A} \subset A\right) \\ &\Rightarrow \quad \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B} \quad \ldots \left(\overset{\circ}{B} \subset B,\ \overset{\circ}{A} \in \tau\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

(**iv**) Her $A, B \subset X$ alt kümeleri için, $A \subset A \cup B$ ve $B \subset A \cup B$ yazılabilir. (iii) ifadesinden $\overset{\circ}{A} \subset (A \cup B)^{\circ}$ ve $\overset{\circ}{B} \subset (A \cup B)^{\circ}$ elde edilir. Bir kümenin alt kümelerinin birleşimi yine bir alt küme olacağından

$$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset (A \cup B)^{\circ}$$

elde edilir.

(**v**) Her $A, B \subset X$ alt kümeleri için, $A \cap B \subset A$ ve $A \cap B \subset B$ yazılabilir. (iii) ifadesinden $(A \cap B)^\circ \subset \mathring{A}$ ve $(A \cap B)^\circ \subset \mathring{B}$ elde edilir. Bir kümenin alt kümelerinin arakesiti yine bir alt küme olacağından

$$(A \cap B)^\circ \subset \mathring{A} \cap \mathring{B} \qquad (1)$$

elde edilir. Tersine $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} x \in \mathring{A} \cap \mathring{B} &\Rightarrow x \in \mathring{A} \ \wedge \ x \in \mathring{B} \\ &\Rightarrow \exists U \in \tau \ \ni x \in U \subset A \ \wedge \ \exists V \in \tau \ \ni x \in V \subset B \\ &\Rightarrow x \in U \cap V \subset A \cap B \qquad \qquad ...(U \cap V \in \tau) \\ &\Rightarrow x \in (A \cap B)^\circ \\ &\Rightarrow \mathring{A} \cap \mathring{B} \subset (A \cap B)^\circ \qquad \qquad (2) \end{aligned}$$

olur. (1) ve (2) ifadelerinden

$$\mathring{A} \cap \mathring{B} = (A \cap B)^\circ$$

elde edilir. □

Uyarı 2.1.20 *(X, τ) topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olmak üzere*

$$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \cup B)^\circ$$

ifadesinin tersi her zaman sağlanmaz. Örneğin, $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayından $A = \mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ve $B = \mathbb{Q}^t$ irrasyonel sayılar kümesi alınırsa

$$\mathring{A} = \emptyset, \ \ \mathring{B} = \emptyset$$

ve

$$(A \cup B)^\circ = \mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$$

olduğundan

$$\mathbb{R} = (A \cup B)^\circ \not\subset \mathring{A} \cup \mathring{B} = \emptyset$$

olur.

Örnek 2.1.21 *Bir (X, τ) topolojik uzayı ve her $A \subset X$ için*

$$\begin{array}{rccc} f: & (X, \tau) & \to & (X, \tau) \\ & A & \mapsto & \mathring{A} \end{array}$$

iyi tanımlı ve sıra koruyan bir fonksiyondur.

Çözüm: $f : (X, \tau) \to (X, \tau)$ dönüşümü her $A, B \subset X$ için

$$A = B \implies \overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{B}$$

olduğundan iyi tanımlı ve

$$A \subset B \implies \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$$

olduğundan sıra koruyan bir fonksiyondur. $\square$

Tanım 2.1.22 *(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere A kümesinin tümleyeninin bir iç noktasına, A kümesinin bir* ***dış noktası*** *denir. A kümesinin bütün dış noktalarından oluşan kümeye A* ***kümesinin dışı*** *denir ve $(X - A)^\circ$ veya dış(A) ile gösterilir.*

Uyarı 2.1.23 *(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere bir kümenin içini alma işlemi sıra koruyan bir işlem olduğundan*

$$\overset{\circ}{A} \cap (X - A)^\circ = \emptyset \ \wedge \ \overset{\circ}{A} \cup (X - A)^\circ \subset X$$

elde edilir.

2.2 Bir Kümenin Kapanışı

Tanım 2.2.1 *(X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ alt küme olmak üzere, bir $x \in X$ noktasının her komşuluğunda A kümesine ait en az bir eleman varsa $x \in X$ noktasına A kümesinin* ***kapanış noktası*** *(değme noktası) denir. A kümesinin kapanış noktalarının kümesine, A* ***kümesinin kapanışı*** *denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.*

$$x \in \overline{A} \iff \forall V \in \vartheta_{(x)}, A \cap V \neq \emptyset$$

$$x \notin \overline{A} \iff \exists V \in \vartheta_{(x)}, A \cap V = \emptyset$$

Uyarı 2.2.2 *(X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ alt küme ve $a \in A$ olmak üzere, her $V \in \vartheta_{(a)}$ komsuluğu için $a \in V$ olduğundan $a \in A \cap V$ olur. Buradan $A \cap V \neq \emptyset$ olacağından $a \in \overline{A}$ elde edilir.*

$$\forall a \in A \text{ için } a \in \overline{A} \implies A \subset \overline{A}$$

Sonuç 2.2.3 *Kümeye ait her nokta kümenin kapanış noktasıdır.*

Örnek 2.2.4 *$X = \{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerinde*

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$$

ailesi bir topoloji belirtir. $A = \{b,c,d\}$ kümesinin hangi noktalarının kapanış noktası olduğunu inceleyelim.

- *$b,c,d \in A$ noktaları için $A \subset \overline{A}$ olduğundan $b,c,d \in \overline{A}$ elde edilir.*
- *$a \in X$ noktası için $a \in U = \{a\} \in \tau$ açık kümesi için $U \subset U$ olduğundan $U \in \vartheta_{(a)}$ olur. $U \cap A = \emptyset$ olduğundan $a \notin \overline{A}$ elde edilir.*
- *$e \in X$ noktası için $e \in U = X \in \tau$ açık kümesi için $U \subset U$ olduğundan e noktasının tek komşuluğu X kümesi olur. $U \cap A \neq \emptyset$ olduğundan $e \in \overline{A}$ elde edilir.*

Sonuç olarak $\overline{A} = \{b,c,d,e\}$ olarak bulunur.

Sonuç 2.2.5 *Kapanış noktası kümeye ait olmayabilir.*

Teorem 2.2.6 *(X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) *$\overline{A}$ kümesi A kümesini kapsayan bütün kapalı kümelerin arakesitine eşittir.*

(ii) $A \subset \overline{A}$

(iii) $\overline{A} \in \tau^t$

(iv) *$\overline{A}$ kümesi A kümesini kapsayan en küçük kapalı kümedir.*

(v) $A \in \tau^t \iff \overline{A} = A$

İspat. **(i)** A kümesini kapsayan bütün kapalı kümelerin arakesitini

$$K = \bigcap_{\substack{F \in \tau^t \\ A \subset F}} F$$

ile gösterelim. $K = \overline{A}$ olduğunu göstermeliyiz. $x \in \overline{A}$ olsun. Kabul edelim ki $x \notin K$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
x \notin K \quad &\Rightarrow \quad \exists F \in \tau^t \ni A \subset F \ \wedge \ x \notin F \\
&\Rightarrow \quad x \in X - F && \ldots (x \notin F) \\
&\Rightarrow \quad X - F \in \tau && \ldots (F \in \tau^t) \\
&\Rightarrow \quad X - F \in \vartheta_{(x)} && \ldots \big(x \in U \ \wedge U \in \tau \implies U \in \vartheta_{(x)}\big) \\
&\Rightarrow \quad A \cap \underbrace{(X - F)}_{\in \vartheta_{(x)}} = \emptyset && \ldots (A \subset F) \\
&\Rightarrow \quad x \notin \overline{A}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $x \in \bar{A}$ olması ile çelişir. Kabulümüz yanlıştır $x \in K$ olması gerekir. Her $x \in \bar{A}$ için $x \in K$ olduğundan

$$\bar{A} \subset K \qquad (1)$$

elde edilir. Tersine $y \in K$ olsun. Kabul edelim ki $y \notin \bar{A}$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
y \notin \bar{A} \;&\Rightarrow\; \exists V \in \vartheta_{(y)} \;\ni A \cap V = \emptyset \\
&\Rightarrow\; \exists U \in \tau \;\ni y \in U \subset V && \ldots \left(V \in \vartheta_{(y)}\right) \\
&\Rightarrow\; A \cap U = \emptyset && \ldots (U \subset V) \\
&\Rightarrow\; A \subset X - U \\
&\Rightarrow\; y \notin \underbrace{X - U}_{\in \tau^t} && \ldots (y \in U,\; U \in \tau) \\
&\Rightarrow\; y \notin K && \ldots (X - U \subset K)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $y \in K$ olması ile çelişir. Kabulümüz yanlıştır $y \in K$ olması gerekir. Her $y \in K$ için $y \in \bar{A}$ olduğundan

$$K \subset \bar{A} \qquad (2)$$

elde edilir. (1) ve (2) ifadelerinden

$$K = \bar{A}$$

elde edilir.

(**ii**) $a \in A$ olmak üzere, her $V \in \vartheta_{(a)}$ komsuluğu için $a \in V$ olduğundan $a \in A \cap V$ olur. Buradan $A \cap V \neq \emptyset$ olacağından $a \in \bar{A}$ elde edilir. Her $a \in A$ için $a \in \bar{A}$ olduğundan

$$A \subset \bar{A}$$

elde edilir.

(**iii**) (i) ifadesinden $\bar{A}$ kümesi A kümesini kapsayan bütün kapalı alt kümelerin arakesiti olur. Kapalı kümelerin herhangi sayıda arakesiti yine bir kapalı küme olduğundan $\bar{A}$ kümesi kapalı bir küme olur.

$$\bar{A} = \underbrace{\bigcap_{A \subset F}}_{\in \tau^t} \overset{\in \tau^t}{F} \Longrightarrow \bar{A} \in \tau^t$$

(**iv**) (iii) ifadesinden $\overline{A}$ kümesi kapalı bir kümedir. (ii) ifadesinden $\overline{A}$ kümesi A kümesini kapsar. Eğer $F \in \tau^t$ kapalı kümesi A kümesini kapsayan bir küme ise (i) ifadesinden $\overline{A}$ kümesi A kümesini kapsayan en küçük kapalı küme olacağından $\overline{A} \subset F$ olur.

(**v**) $\Rightarrow$ $A \in \tau^t$ olsun. (ii) ifadesinden $A \subset \overline{A}$ olur. Ayrıca $A \in \tau^t$ ve $A \subset A$ olduğundan (iv) ifadesinden $\overline{A} \subset A$ olur. Buradan

$$\overline{A} = A$$

elde edilir.

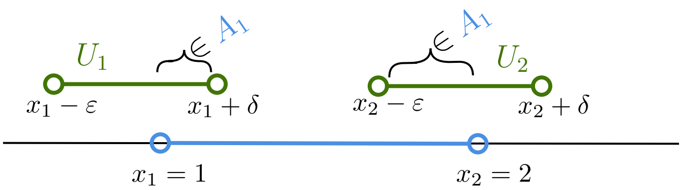
$\Leftarrow$ Tersine $\overline{A} = A$ olsun. (iii) ifadesinden $\overline{A}$ kümesi kapalı bir küme olduğundan eşiti olan A kümeside kapalı bir küme olur. □

Örnek 2.2.7 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında*

$$A_1 =]1,2[, \;\; A_2 =]1,2], \;\; A_3 = [1,2[, \;\; A_4 = [1,2]$$

kümelerinin kapanış noktalarını inceleyelim.

- $x_1 = 1, x_2 = 2 \in \mathbb{R}$ *noktalarını inceleyelim.* $\varepsilon, \delta > 0$ *olmak üzere* $U_1 =]x_1 - \varepsilon, x_1 + \delta[, U_2 =]x_2 - \varepsilon, x_2 + \delta[\in \mathcal{U}$ *olduğundan* $U_1 \in \vartheta_{(x_1)}$ *ve* $U_2 \in \vartheta_{(x_2)}$ *için* $A_1 \cap U_1 \neq \emptyset$ *ve* $A_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ *olur. Dolayısıyla* $x_1, x_2 \in \overline{A_1}$ *olur.*



$$x_i \in \overset{\in \mathcal{U}}{U_i} \subset U_i \Longrightarrow U_i \in \vartheta_{(x_i)} \quad (i = 1,2)$$

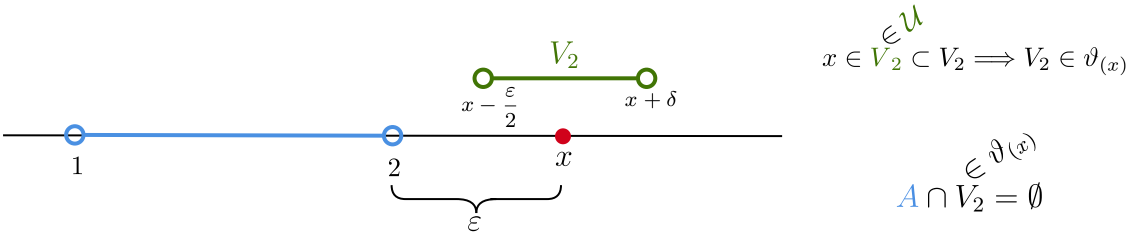
$$A \cap \overset{\in \vartheta(x_i)}{U_i} \neq \emptyset \quad (i = 1,2)$$

$x < 1$ *için* $x \neq 1$ *olduğundan* $d(1,x) = \varepsilon$ *olacak şekilde bir* ε *reel sayısı vardır.* $\delta > 0$ *olmak üzere* $V_1 = \left]x - \delta, x + \frac{\varepsilon}{2}\right[\in \mathcal{U}$ *açık kümesi için* $A \cap V_1 = \emptyset$ *olur. Buradan* $x < 1$ *için* $x \notin \overline{A_1}$ *elde ederiz.*

$$x \in \overset{\in \mathcal{U}}{V_1} \subset V_1 \Longrightarrow V_1 \in \vartheta_{(x)}$$

$$A \cap \overset{\in \vartheta(x)}{V_1} = \emptyset$$

$x > 2$ *için* $x \neq 2$ *olduğundan* $d(2,x) = \varepsilon$ *olacak şekilde bir* ε *reel sayısı vardır.* $\delta > 0$ *olmak üzere* $V_2 = \left]x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \delta\right[\in \mathcal{U}$ *açık kümesi için* $A \cap V_2 = \emptyset$ *olur. Buradan* $x > 2$ *için* $x \notin \bar{A}_1$ *elde ederiz.*



Her $x \in A_1$ *için* $x \in \bar{A}_1$ *olduğundan* A_1 *kümesinin kapanışını*

$$\bar{A}_1 = [1,2]$$

olarak elde ederiz.

- *Benzer şekilde* A_2, A_3, A_4 *kümelerinin kapanışları*

$$\bar{A}_2 = \bar{A}_3 = \bar{A}_4 = [1,2]$$

olarak elde edilir.

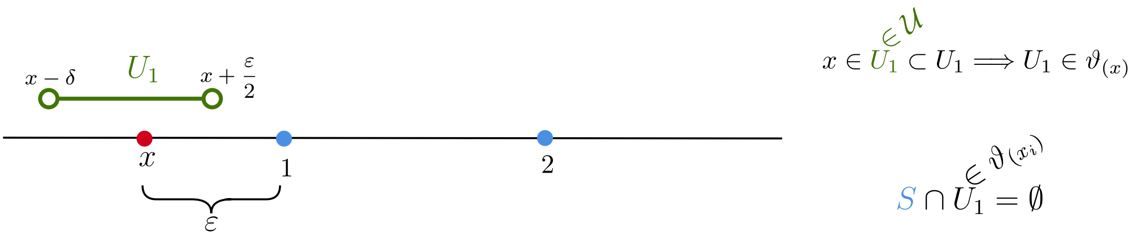
Sonuç 2.2.8 *Farklı kümelerin kapanışları aynı olabilir.*

Örnek 2.2.9 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında*

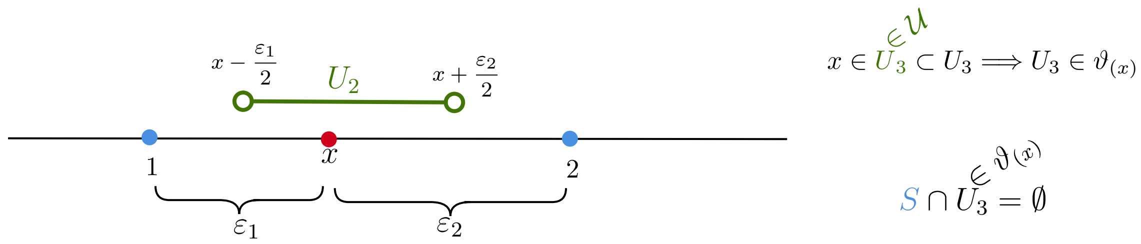
$$S = \{1,2\}$$

kümesinin kapanış noktalarını inceleyelim.

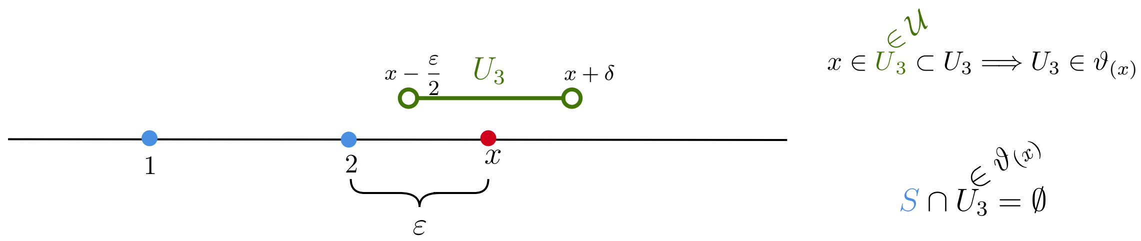
- $x < 1$ *için* $x \neq 1$ *olduğundan* $d(1,x) = \varepsilon$ *olacak şekilde bir* ε *reel sayısı vardır.* $\delta > 0$ *olmak üzere* $U_1 = \left]x - \delta, x + \frac{\varepsilon}{2}\right[\in \mathcal{U}$ *açık kümesi için* $S \cap U_1 = \emptyset$ *olur. Buradan* $x < 1$ *için* $x \notin \bar{S}$ *elde ederiz.*



- *$1 < x < 2$ için $x \neq 1$ ve $x \neq 2$ olduğundan $d(1, x) = \varepsilon_1$ ve $d(x, 2) = \varepsilon_2$ olacak şekilde bir $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ reel sayıları vardır. Buradan $U_2 = \left]x - \frac{\varepsilon_1}{2}, x + \frac{\varepsilon_2}{2}\right[\in \mathcal{U}$ açık kümesi için $S \cap U_2 = \emptyset$ olur. Buradan $1 < x < 2$ için $x \notin \bar{S}$ elde ederiz.*



- *$x > 2$ için $x \neq 2$ olduğundan $d(x, 2) = \varepsilon$ olacak şekilde bir ε reel sayısı vardır. $\delta > 0$ olmak üzere $U_3 = \left]x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \delta\right[\in \mathcal{U}$ açık kümesi için $S \cap U_3 = \emptyset$ olur. Buradan $x > 2$ için $x \notin \bar{S}$ elde ederiz.*



Her $x \in S$ için $x \in \bar{S}$ olduğundan S kümesinin kapanışını

$$\bar{S} = \{1, 2\}$$

olarak elde ederiz.

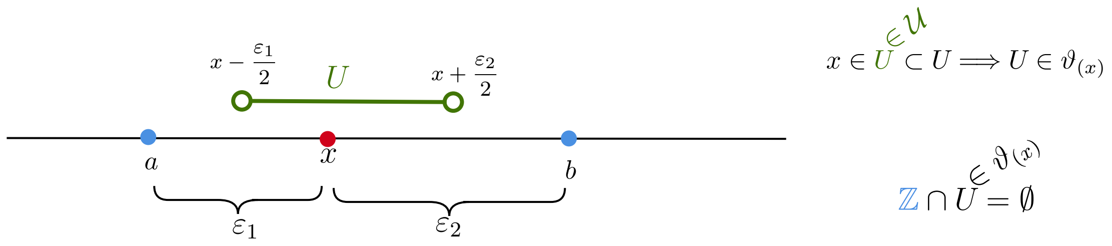
Sonuç 2.2.10 *Sonlu her küme tek nokta kümelerinin birleşimi olarak yazılabileceğinden ve kapalı kümelerin sonlu birleşimi kapalı küme olduğundan $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayında sonlu kümeler kapalı küme olur.*

Örnek 2.2.11 *$(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayında $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesinin kapanış noktalarını inceleyelim.*

Çözüm: $x \notin \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda $\lfloor x \rfloor = a$ ve $\lceil x \rceil = b$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ vardır. $x \neq a$ ve $x \neq b$ olduğundan $d(a, x) = \varepsilon_1$ ve $d(x, b) = \varepsilon_2$ olacak şekilde bir $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ reel sayıları vardır. Buradan $U = \left]x - \frac{\varepsilon_1}{2}, x + \frac{\varepsilon_2}{2}\right[\in \mathcal{U}$ açık kümesi için

$$\mathbb{Z} \cap U = \emptyset$$

olur. Sonuç olarak $a < x < b$ için $x \notin \overline{\mathbb{Z}}$ elde ederiz.



Her $y \in \mathbb{Z}$ için $y \in \overline{\mathbb{Z}}$ olduğundan $\mathbb{Z}$ kümesinin kapanışını

$$\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$$

olarak elde ederiz. $\square$

Örnek 2.2.12 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında* $\mathbb{N}$ *doğal sayılar kümesinin kapanışı* $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ *olur.*

Sonuç 2.2.13 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında* $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ *ve* $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ *olduğundan bu uzayda* $\mathbb{Z}$ *ve* $\mathbb{N}$ *kümeleri kapalı kümeler olurlar.*

Örnek 2.2.14 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında*

$$Y = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

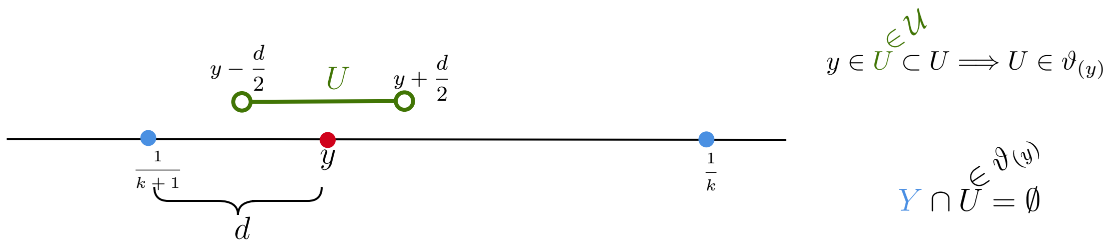
kümesinin kapanış noktalarını inceleyelim.

Çözüm:

- Her $a \in Y$ için $a \in \overline{Y}$ olur.
- $b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ ve $b \notin Y$ olsun. b noktasının Y kümesinin bir elemanına olan en yakın uzaklığı

$$d = min\{|b - m|\, m \in Y\}$$

olmak üzere $U = \left]b - \frac{d}{2}, b + \frac{d}{2}\right[\in \mathcal{U}$ açık kümesi için $Y \cap U = \emptyset$ olur. Buradan $b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ ve $b \notin Y$ için $b \notin \overline{Y}$ elde ederiz.



- $0 \in \mathbb{R}$ için $\varepsilon, \delta > 0$ olmak üzere 0 noktasını içeren her açık küme $V =]0-\varepsilon, 0+\delta[\in \mathcal{U}$ olarak yazılabilir. Buradan $b \in Y$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
-\varepsilon < 0 < \delta \quad &\Rightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} \ \ni \ n < \tfrac{1}{b} \\
&\Rightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} \ \ni \ \tfrac{1}{n} < b \\
&\Rightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} \ 0 < \tfrac{1}{n} < b \qquad ...(n > 0) \\
&\Rightarrow \quad \tfrac{1}{n} \in V \\
&\Rightarrow \quad V \cap Y \neq \emptyset \qquad ...\left(\tfrac{1}{n} \in Y\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak 0 noktasının her komşuluğunda Y kümesine ait en az bir eleman mevcut olduğundan $0 \in \bar{Y}$ elde ederiz.

Buradan Y kümesinin kapanışı

$$\bar{Y} = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$$

olarak bulunur. Burada Y kümesi için $Y \neq \bar{Y}$ olduğundan Y kümesi $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayında kapalı bir küme değildir. □

Sonuç 2.2.15 *$(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayında tek noktalardan oluşan kümeler kapalı küme olmayabilir.*

Örnek 2.2.16 *$(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayında $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin kapanış noktalarını inceleyelim.*

Çözüm: $x \notin \mathbb{Q}$ olsun. $\varepsilon, \delta > 0$ olmak üzere $U =]x-\varepsilon, x+\delta[\in \mathcal{U}$ açık kümesi en az bir rasyonel sayı içerdiğinden (bakınız örnek1.6.9) $U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla $x \in \bar{\mathbb{Q}}$ olur. Ayrıca kümeye ait her nokta bir kapanış noktası olduğundan $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesinin kapanışı

$$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^t = \mathbb{R}$$

olur. □

Örnek 2.2.17 *$(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayında $\mathbb{Q}^t$ irrasyonel sayılar kümesinin kapanışı $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ olur.*

Not. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde tek nokta kümelerinin birleşimi olarak yazılabilen

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}, \ \mathbb{Q}^t = \bigcup_{k \in \mathbb{Q}^t} \{k\}, \ \mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}, \ \mathbb{Z} = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} \{z\}, \ Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} \right\}$$

kümeleri için $\mathbb{N}, \mathbb{Z} \in \mathcal{U}^t$ kümeleri $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayında kapalı kümelerdir ancak $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^t, Y \notin \mathcal{U}^t$ kümeleri $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayında kapalı küme değildirler. □

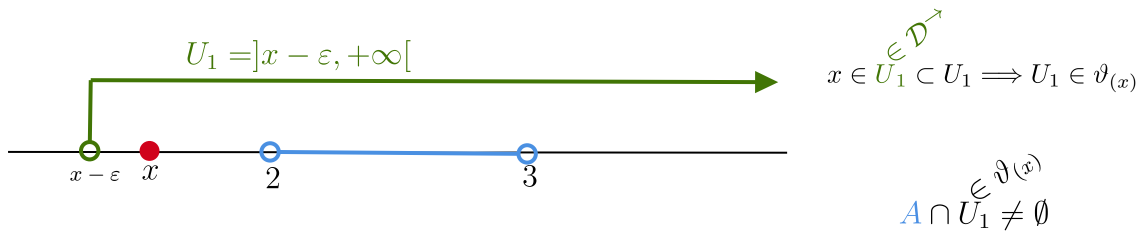
Örnek 2.2.18 $(\mathbb{R}, \mathcal{D}^{\rightarrow})$ *uzayında* $A =]2,3[$ *kümesinin kapanış noktalarını inceleyelim.*

Çözüm: $(\mathbb{R}, \mathcal{D}^{\rightarrow})$ uzayında $\bar{A}$ kümesi A kümesini kapsayan en küçük kapalı küme olacağından

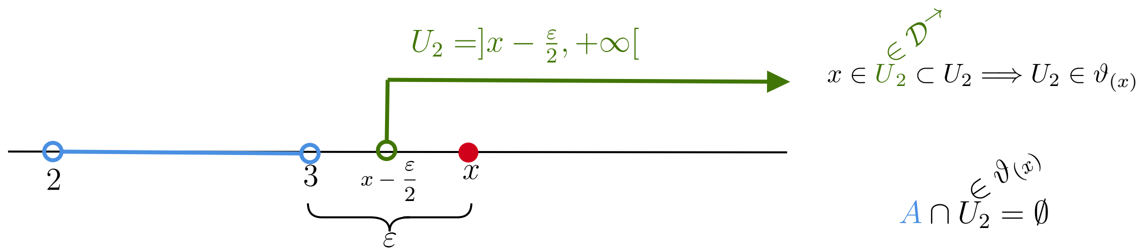
$$\bar{A} =]-\infty, 3]$$

olur. Şimdi bunu noktasal olarak inceleyelim.

- $x \leqslant 3$ olsun. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $U_1 =]x-\varepsilon, +\infty[\in \mathcal{D}^{\rightarrow}$ açık kümesi için $U_1 \cap A \neq \emptyset$ olduğundan $x \leqslant 3$ için $x \in \bar{A}$ olur.



- $x > 3$ için $x \neq 3$ olduğundan $d(3, x) = \varepsilon$ olacak şekilde bir ε reel sayısı vardır. $U_2 =]x - \frac{\varepsilon}{2}, +\infty[\in \mathcal{D}^{\rightarrow}$ açık kümesi için $U_2 \cap A = \emptyset$ olduğundan $x > 3$ için $x \notin \bar{A}$ olur.



$\square$

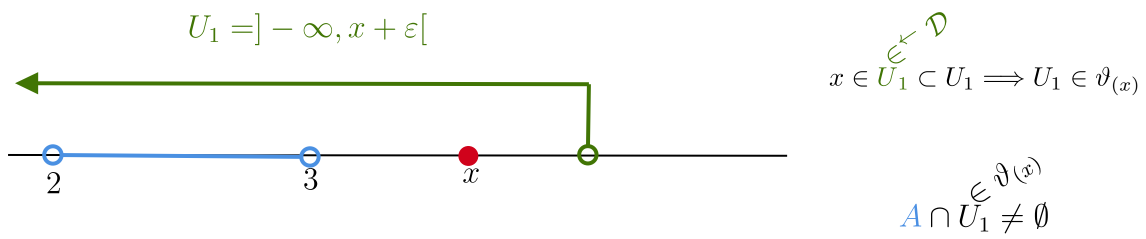
Örnek 2.2.19 $(\mathbb{R}, {}^{\leftarrow}\mathcal{D})$ *uzayında* $A =]2,3[$ *kümesinin kapanış noktalarını inceleyelim.*

Çözüm: $(\mathbb{R}, {}^{\leftarrow}\mathcal{D})$ uzayında $\bar{A}$ kümesi A kümesini kapsayan en küçük kapalı küme olacağından

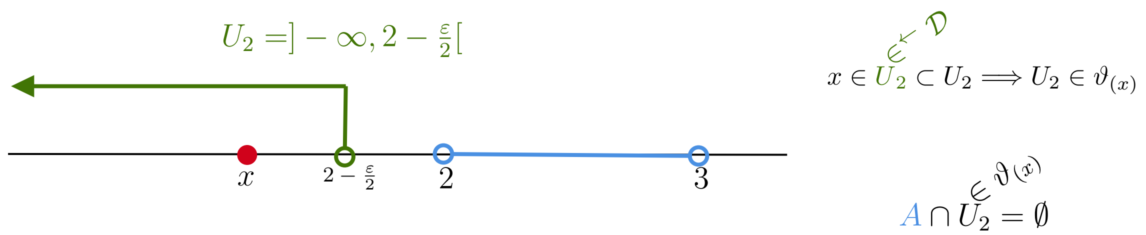
$$\bar{A} = [2 + \infty[$$

olur. Şimdi bunu noktasal olarak inceleyelim.

- $x \geqslant 2$ olsun. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $U_1 =]-\infty, x+\varepsilon[\in^{\leftarrow} \mathcal{D}$ açık kümesi için $U_1 \cap A \neq \emptyset$ olduğundan $x \geqslant 2$ için $x \in \bar{A}$ olur.



- $x < 2$ için $x \neq 2$ olduğundan $d(x,2) = \varepsilon$ olacak şekilde bir ε reel sayısı vardır. $U_2 =]-\infty, 2-\frac{\varepsilon}{2}[\in^{\leftarrow} \mathcal{D}$ açık kümesi için $U_2 \cap A = \emptyset$ olduğundan $x < 2$ için $x \notin \bar{A}$ olur.



$\square$

Uyarı 2.2.20 *Bir kümenin kapanışı üzerinde bulunduğu topolojik uzaya göre değişir. Örneğin $A =]2,3[$ kümesi için A kümesinin alışılmış uzayda, sol ışın ve sağ ışın uzayında kapanış noktaları kümeleri farklıdır.*

$$\bar{A}_{\mathcal{D}^{\rightarrow}} =]-\infty, 3], \quad \bar{A}_{\mathcal{U}} = [2,3], \quad \bar{A}_{\leftarrow\mathcal{D}} = [2+\infty[$$

Teorem 2.2.21 (X,τ) *bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere*

(i) $X - \bar{A} = (X-A)^{\circ}$

(ii) $X - \mathring{A} = (X-A)^{-}$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. **(i)** $x \in X - \bar{A}$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} x \in X - \bar{A} &\Rightarrow x \notin \bar{A} \\ &\Rightarrow \exists V \in \vartheta_{(x)} \ni A \cap V = \emptyset \\ &\Rightarrow x \in V \subset X - A \\ &\Rightarrow x \in (X-A)^{\circ} \qquad (1) \end{aligned}$$

olur. Tersine $x \in (X-A)^\circ$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} x \in (X-A)^\circ &\Rightarrow (X-A)^\circ \in \vartheta_{(x)} && \ldots(\square^\circ \in \tau) \\ &\Rightarrow A \cap (X-A)^\circ = \emptyset && \ldots(A \cap (X-A) = \emptyset, \quad \square^\circ \subset \square) \\ &\Rightarrow x \notin \bar{A} \\ &\Rightarrow x \in (X-\bar{A}) && (2) \end{aligned}$$

olur. (1) ve (2) ifadelerinden

$$X - \bar{A} = (X-A)^\circ$$

elde edilir.

(ii) $\square = X - A$ alalım. Buradan

$$\begin{aligned} \square \subset X &\iff (X-\bar{\square}) = (X-\square)^\circ && \ldots((i) \text{ ifadesinden}) \\ &\iff (X-\bar{\square}) = \mathring{A} && \ldots(X-\square = A) \\ &\iff \bar{\square} = X - \mathring{A} && \ldots(A = B \implies X-A = X-B) \\ &\iff (X-A)^- = X - \mathring{A} && \ldots(\square = X-A) \end{aligned}$$

elde edilir.

$\square$

Not. (X,τ) topolojik uzayında bir $A \subset X$ alt kümesinin tümleyenini

$$X - A = \complement A$$

ile gösterelim. Böylece bir kümenin içi ve kapanışı arasındaki bağlantı

$$\complement \bar{A} = \mathring{\overbrace{\complement A}}$$

ve

$$\complement \mathring{A} = \overline{\complement A}$$

olarak verilir. $\square$

Teorem 2.2.22 *(X,τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $\overline{X} = X$ *ve* $\overline{\emptyset} = \emptyset$

(ii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

(iii) $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$

(iv) $(A \cup B)^- = \overline{A} \cup \overline{B}$

(v) $(A \cap B)^- \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

İspat. (**i**) $\emptyset, X \in \tau^t$ ve kapalı kümelerin kapanışı kendisine eşit olduğundan

$$\overline{X} = X \ \wedge \ \overline{\emptyset} = \emptyset$$

olur.

(**ii**) $A \subset X$ için $\overline{A} \in \tau^t$ ve

$$\Box \in \tau^t \implies \overline{\Box} = \Box$$

olduğundan $\Box = \overline{A}$ alınırsa

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$$

elde edilir.

(**iii**) $A \subset B$ ve $x \in \overline{A}$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} \ &\Rightarrow \ \forall V \in \vartheta_{(x)}, \ A \cap V \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \ \forall V \in \vartheta_{(x)}, \ B \cap V \neq \emptyset \qquad ...(A \subset B) \\ &\Rightarrow \ x \in \overline{B} \\ &\Rightarrow \ \overline{A} \subset \overline{B} \end{aligned}$$

elde edilir.

(**iv**) Her $A, B \subset X$ alt kümeleri için, $A \subset A \cup B$ ve $B \subset A \cup B$ yazılabilir. (iii) ifadesinden $\overline{A} \subset (A \cup B)^-$ ve $\overline{B} \subset (A \cup B)^-$ elde edilir. Bir kümenin alt kümelerinin birleşimi yine bir alt küme olacağından

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subset (A \cup B)^- \qquad (1)$$

elde edilir. Tersine $A \subset \overline{A}$ ve $B \subset \overline{B}$ olduğundan birleşim işleminden $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ olur. Bir kümenin kapanışı her zaman kapalı küme olacağından $\overline{A}, \overline{B} \in \tau^t$ ve kapalı kümelerin sonlu birleşimi kapalı küme olacağından $\bar{A} \cup \bar{B}$ kapalı küme olur. Ayrıca $A \subset \bar{A}$ ve $B \subset \bar{B}$ olduğundan $A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B}$ ve bir kümenin kapanışı kümeyi kapsayacağından $A \cup B \subset (A \cup B)^-$ olur. $(A \cup B)^-$ kümesi $A \cup B$ kümesini kapsayan en küçük kapalı küme olacağından

$$(A \cup B)^- \subset \bar{A} \cup \bar{B} \qquad (2)$$

olur. (1) ve (2) ifadelerinden

$$\bar{A} \cap \bar{B} = (A \cap B)^-$$

elde edilir.

(**v**) Her $A, B \subset X$ alt kümeleri için, $A \cap B \subset A$ ve $A \cap B \subset B$ yazılabilir. (iii) ifadesinden $(A \cap B)^- \subset \bar{A}$ ve $(A \cap B)^- \subset \bar{B}$ elde edilir. Bir kümenin alt kümelerinin arakesiti yine bir alt küme olacağından

$$(A \cap B)^- \subset \bar{A} \cap \bar{B}$$

elde edilir. □

Uyarı 2.2.23 *(X, τ) topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olmak üzere*

$$(A \cap B)^- \subset \bar{A} \cap \bar{B}$$

ifadesinin tersi her zaman sağlanmaz. Örneğin, $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayından $A = \mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ve $B = \mathbb{Q}^t$ irrasyonel sayılar kümesi alınırsa

$$\bar{A} = \mathbb{R}, \bar{B} = \mathbb{R}$$

ve

$$(A \cap B)^- = \bar{\emptyset} = \emptyset$$

olduğundan

$$\mathbb{R} = \bar{A} \cap \bar{B} \not\subset (A \cap B)^- = \emptyset$$

olur.

Örnek 2.2.24 *(X, τ) topolojik uzayı ve her $A \subset X$ için*

$$\begin{array}{rccc} f: & (X, \tau) & \rightarrow & (X, \tau) \\ & A & \mapsto & \bar{A} \end{array}$$

iyi tanımlı ve sıra koruyan bir fonksiyondur.

Çözüm: $f:(X,\tau)\to(X,\tau)$ dönüşümü her $A,B\subset X$ için

$$A=B \implies \bar{A}=\bar{B}$$

olduğundan iyi tanımlı ve

$$A\subset B \implies \bar{A}\subset\bar{B}$$

olduğundan sıra koruyan bir fonksiyondur. □

Teorem 2.2.25 *(X,τ) bir topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. $F\subset A$ alt kümesinin (X,τ) uzayındaki kapanışı $\bar{F}$ ve (A,τ_A) alt uzayındaki kapanışı $(\bar{F})_A$ olmak üzere*

$$(\bar{F})_A=\bar{F}\cap A$$

olur.

İspat. $\bar{F}\in\tau^t$ kapalı kümesi için $A\cap\bar{F}$ kümesi (A,τ_A) uzayında kapalı küme olur. $(\bar{F})_A$ kümesi (A,τ_A) uzayında F kümesini kapsayan en küçük kapalı küme olacağından

$$(\bar{F})_A\subset A\cap\bar{F} \qquad (1)$$

elde edilir. $x\in A\cap\bar{F}$ için

$$\begin{aligned}
x\in A\cap\bar{F} &\Rightarrow \forall V\in\vartheta_{(x)}, V\cap F\neq\emptyset && \ldots\left(x\in\bar{F}\right)\\
&\Rightarrow \forall V\in\vartheta_{(x)}, A\cap(V\cap F)\neq\emptyset && \ldots(x\in A)\\
&\Rightarrow \forall A\cap V\in\left(\vartheta_{(x)}\right)_A, (A\cap V)\cap F\neq\emptyset\\
&\Rightarrow x\in(\bar{F})_A\\
&\Rightarrow A\cap\bar{F}\subset(\bar{F})_A && (2)
\end{aligned}$$

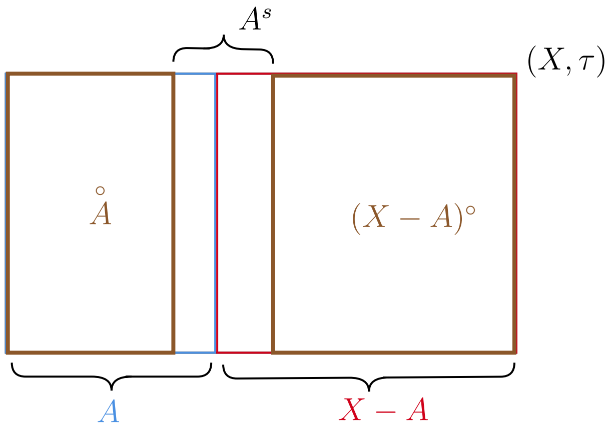
olur. (1) ve (2) ifadelerinden

$$(\bar{F})_A=\bar{F}\cap A$$

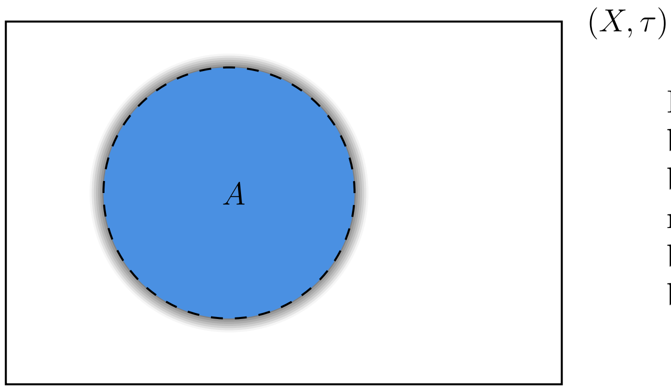
elde edilir. □

2.3 Bir Kümenin Sınırı

Tanım 2.3.1 *(X,τ) topolojik uzay ve $A\subset X$ alt küme olmak üzere, A kümesinin içine ve dışına ait olmayan noktaların oluşturduğu kümeye A kümesinin* ***sınırı*** *denir ve A^s ile gösterilir.*



$$x \in A^s \Leftrightarrow x \notin \mathring{A} \;\; ve \;\; x \notin (X-A)^\circ$$



Bir kümenin sınır noktaları, kümenin kenarında bulunan, kümenin icçr ifadeyle, bir noktanın sınır noktası olması için noktanın her komşuluğunda kümeye ait en az bir nokta ve kümeye ait olmayan en az bir noktanın bulunması gerekir.

Teorem 2.3.2 (X,τ) *topolojik uzay ve* $A \subset X$ *olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $X^s = \emptyset$ *ve* $\emptyset^s = \emptyset$

(ii) $A^s = \bar{A} - \mathring{A}$

(iii) $A^s = \bar{A} \cap (X-A)^-$

(iv) $A^s \in \tau^t$

(v) $A^s = (X-A)^s$

(vi) $(A^s)^s \subset A^s$

İspat. **(i)** (X,τ) topolojik uzayında $\mathring{X} = X$ olur. Kümenin içine ait olan noktalar sınır noktası olamayacağından

$$X^s = \emptyset$$

elde edilir. Boş kümenin dışı $(X-\emptyset)^\circ = \mathring{X} = X$ olur. Kümenin dışına ait olan noktalar sınır noktası olamayacağından

$$\emptyset^s = \emptyset$$

elde edilir.

(ii) $x \in A^s$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} x \in A^s &\Leftrightarrow x \notin \overset{\circ}{A} \wedge x \notin (X-A)^\circ \\ &\Leftrightarrow x \notin \overset{\circ}{A} \wedge x \notin (X-\bar{A}) \qquad ... \left((X-A)^\circ = X-\bar{A}\right) \\ &\Leftrightarrow x \notin \overset{\circ}{A} \wedge x \in \bar{A} \\ &\Leftrightarrow x \in \bar{A} - \overset{\circ}{A} \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$A^s = \bar{A} - \overset{\circ}{A}$$

elde edilir.

(iii) $A \subset X$ için

$$\begin{aligned} A^s = \bar{A} - \overset{\circ}{A} &\Leftrightarrow \bar{A} \cap (X - \overset{\circ}{A}) \\ &\Leftrightarrow \bar{A} \cap (X-A)^- \qquad ... \left((X-\overset{\circ}{A}) = (X-A)^-\right) \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$A^s = \bar{A} \cap (X-A)^-$$

elde edilir.

(iv) (iii) ifadesinden bir $A \subset X$ alt kümesinin sınırı

$$A^s = \bar{A} \cap (X-A)^-$$

olarak yazılabilir. (X,τ) topolojik uzayında bir kümenin kapanışı kapalı bir küme ve kapalı kümelerin arakesitleri kapalı küme olduğundan eşitliğin sağ tarafı $\bar{A} \cap (X-A)^-$ kapalı küme olur. Buradan eşitliğin sol tarafı A^s kümeside kapalı küme olur. Sonuç olarak

$$A^s \in \tau^t$$

elde ederiz.

(**v**) $A \subset X$ için

$$\begin{aligned}
(X-A)^s &= (X-A)^- - (X-A)^\circ \\
&= (X-A)^- - \left(X - \bar{A}\right) && ...\left((X-A)^\circ = X - \bar{A}\right) \\
&= (X-A)^- \cap X - \left(X - \bar{A}\right) \\
&= (X-A)^- \cap \bar{A} \\
&= \left(X - \mathring{A}\right) \cap \bar{A} && ...\left((X-A)^- = X - \mathring{A}\right) \\
&= \bar{A} - \mathring{A} \\
&= A^s
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$A^s = (X-A)^s$$

elde edilir.

(**vi**) $A \subset X$ için

$$\begin{aligned}
(A^s)^s &= (A^s)^- - (A^s)^\circ \\
&= A^s \cap \underbrace{(X - (A^s)^\circ)}_{\square} && ...\left(A^s \in \tau^t \Rightarrow (A^s)^- = A^s\right) \\
&\subset A^s && ...(A^s \cap \square \subset A^s)
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$(A^s)^s \subset A^s$$

elde edilir. $\square$

Örnek 2.3.3 $X = \{a,b,c,d,e\}$ *kümesi üzerinde*

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$$

ailesi bir topoloji belirtir. (X,τ) *uzayında* $A = \{b,c,d\}$ *kümesinin sınırını inceleyelim.*

Çözüm: A kümesinin içi A kümesinin kapsadığı en büyük açık küme olduğundan

$$\mathring{A} = \{c,d\}$$

olur. τ ailesinin tümleyenini alınırsa kapalı kümelerin ailesini

$$\tau^t = \{\emptyset, X, \{b,c,d,e\}, \{c,d,e\}, \{a,b,d,e\}, \{b,d,e\}, \{d,e\}, \{a,b,e\}, \{b,e\}, \{e\}\}$$

elde ederiz. A kümesinin kapanışı A kümesini kapsayan en küçük kapalı küme olduğundan

$$\overline{A} = \{b, c, d, e\}$$

olur. Buradan

$$A^s = \overline{A} - \overset{\circ}{A} = \{b, c, d, e\} - \{c, d\} = \{b, e\}$$

olarak bulunur. □

Örnek 2.3.4 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında* $A = \{1, 2\} \cup [3, 4[$ *kümesinin sınırını inceleyelim.*

Çözüm: $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayında $\overset{\circ}{A} =]3, 4[$ ve $\overline{A} = \{1, 2\} \cup [3, 4]$ olduğundan A kümesinin sınırı

$$A^s = \overline{A} - \overset{\circ}{A} = \{1, 2, 3, 4\}$$

olarak bulunur. □

Örnek 2.3.5 $(\mathbb{R}, \mathcal{D}^{\rightarrow})$ *uzayında* $A = \{1, 2\} \cup [3, 4[$ *kümesinin sınırını inceleyelim.*

Çözüm: $(\mathbb{R}, \mathcal{D}^{\rightarrow})$ uzayında $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ ve $\overline{A} =]-\infty, 4]$ olduğundan A kümesinin sınırı

$$A^s = \overline{A} - \overset{\circ}{A} =]-\infty, 4]$$

olarak bulunur. □

Örnek 2.3.6 $(\mathbb{R}, {}^{\leftarrow}\mathcal{D})$ *uzayında* $A =]-\infty, 3[\cup [7, 8[$ *kümesinin sınırını inceleyelim.*

Çözüm: $(\mathbb{R}, {}^{\leftarrow}\mathcal{D})$ uzayında $\overset{\circ}{A} =]-\infty, 3[$ ve $\overline{A} = \mathbb{R}$ olduğundan A kümesinin sınırı

$$A^s = \overline{A} - \overset{\circ}{A} = [3 + \infty[$$

olarak bulunur. □

Örnek 2.3.7 (X, τ) *bir topolojik uzay ve* $A \subset X$ *olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup A^s$

(ii) $X = (X - A)^\circ \cup \overset{\circ}{A} \cup A^s$

(iii) $\overline{A} = X - (X - A)^\circ$

(iv) $\overset{\circ}{A} = A \cap (X - A^s)$

Çözüm:

(**i**) $A \subset X$ için,

$$\begin{aligned}
\mathring{A} \cup A^s &= \mathring{A} \cup \left(\bar{A} - \mathring{A} \right) \\
&= \mathring{A} \cup \left(\bar{A} \cap \left(X - \mathring{A} \right) \right) \\
&= \left(\mathring{A} \cup \bar{A} \right) \cap \left(\mathring{A} \cup \left(X - \mathring{A} \right) \right) \\
&= \bar{A} \cap X \qquad\qquad\qquad\qquad ... \left(\mathring{A} \subset \bar{A} \right) \\
&= \bar{A}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(**ii**) $A \subset X$ için,

$$\begin{aligned}
(X - A)^\circ \cup \mathring{A} \cup A^s &= (X - A)^\circ \cup \bar{A} \qquad\qquad ... \left(\mathring{A} \cup A^s = \bar{A} \right) \\
&= (X - \bar{A}) \cup \bar{A} \quad ... \left((X - A)^\circ = (X - \bar{A}) \right) \\
&= X
\end{aligned}$$

elde edilir.

(**iii**) $A \subset X$ için,

$$\begin{aligned}
X - (X - A)^\circ &= X - (X - \bar{A}) \\
&= \bar{A}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(**iv**) $A \subset X$ için,

$$\begin{aligned}
A \cap (X - A^s) &= A \cap \left(X - \left(\bar{A} - \mathring{A}\right)\right) \\
&= A \cap \left(X - \left(\bar{A} \cap \left(X - \mathring{A}\right)\right)\right) \\
&= A \cap \left(\left(X - \bar{A}\right) \cup \left(X - \left(X - \mathring{A}\right)\right)\right) \quad ...(X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)) \\
&= A \cap \left(\left(X - \bar{A}\right) \cup \mathring{A}\right) \\
&= \underbrace{\left(A \cap \left(X - \bar{A}\right)\right)}_{\emptyset} \cup \left(A \cap \mathring{A}\right) \quad ...\left(A \cap \left(X - \bar{A}\right) \subset A \cap (X - A) = \emptyset\right) \\
&= \mathring{A} \quad ...\left(\mathring{A} \subset A\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 2.3.8 *(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere A kümesinin kapalı küme olması için gerek ve yeter şart $A^s \subset A$ olmasıdır.*

$$A \in \tau^t \iff A^s \subset A$$

İspat. $\Rightarrow$ $A \in \tau^t$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
A^s &= \bar{A} - \mathring{A} \\
&= A - \mathring{A} \quad ...\left(A \in \tau^t \Rightarrow \bar{A} = A\right) \\
&\subset A
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\Leftarrow$ Tersine $A^s \subset A$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
A^s \subset A &\Rightarrow A^s \cup \mathring{A} \subset A \quad ...\left(\mathring{A} \subset A\right) \\
&\Rightarrow \bar{A} \subset A \quad ...\left(\bar{A} = A^s \cup \mathring{A}\right)
\end{aligned}$$

elde edlilir. $A \subset \bar{A}$ her zaman sağlandığından $\bar{A} = A$ olur. Kapanışı kendisine eşit olan küme kapalı küme olduğundan

$$A \in \tau^t$$

olur. □

Örnek 2.3.9 (X, τ) *bir topolojik uzay ve* $A \subset X$ *olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $A \cap A^s = \emptyset \iff A \in \tau$

(ii) $A^s = \emptyset \iff A \in \tau \ \wedge \ A \in \tau^t$

Çözüm: **(i)** $\Rightarrow A \cap A^s = \emptyset$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
A \cap A^s = \emptyset \ &\Rightarrow \ A \cap \left(\bar{A} - \mathring{A} \right) = \emptyset \\
&\Rightarrow \ A \cap \left(\bar{A} \cap \left(X - \mathring{A} \right) \right) = \emptyset \\
&\Rightarrow \ \left(A \cap \bar{A} \right) \cap \left(X - \mathring{A} \right) = \emptyset \\
&\Rightarrow \ A \cap \left(X - \mathring{A} \right) = \emptyset \qquad \ldots \left(A \cap \bar{A} = A \right) \\
&\Rightarrow \ A \subset X - \left(X - \mathring{A} \right) \\
&\Rightarrow \ A \subset \mathring{A}
\end{aligned}$$

olur. $\mathring{A} \subset A$ her zaman sağlandığından $A = \mathring{A}$ olur. İçi kendisine eşit olan küme açık küme olduğundan

$$A \in \tau$$

elde edilir.

$\Leftarrow A \in \tau$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
A \cap A^s \ &= \ A \cap \left(X - \mathring{A} \right) \\
&= \ \mathring{A} \cap \left(X - \mathring{A} \right) \quad \ldots \left(A \in \tau \Rightarrow \mathring{A} = A \right) \\
&= \ \emptyset
\end{aligned}$$

elde edilir.

(**ii**) $\Rightarrow A^s = \emptyset$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
A^s = \emptyset \;&\Rightarrow\; \bar{A} - \mathring{A} = \emptyset \\
&\Rightarrow\; \bar{A} \cap \left(X - \mathring{A} \right) = \emptyset \\
&\Rightarrow\; \bar{A} \subset \mathring{A} \\
&\Rightarrow\; A \subset \bar{A} \subset \mathring{A} \subset A \qquad ... \left(A \subset \bar{A},\ \mathring{A} \subset A \right) \\
&\Rightarrow\; \mathring{A} = A = \bar{A} \\
&\Rightarrow\; A \in \tau \ \wedge \ A \in \tau^t
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\Leftarrow A \in \tau$ ve $A \in \tau^t$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
A^s &= \bar{A} - \mathring{A} \\
&= A - \mathring{A} \quad ... \left(A \in \tau^t \Rightarrow \bar{A} = A \right) \\
&= A - A \quad ... \left(A \in \tau \Rightarrow \mathring{A} = A \right) \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Örnek 2.3.10 (X, τ) *bir topolojik uzay ve* $A \subset X$ *olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(**i**) $\left(\mathring{A}\right)^s \subset A^s$

(**ii**) $\left(\bar{A}\right)^s \subset A^s$

Çözüm: (**i**) $A \subset X$ için

$$\begin{aligned}
\left(\mathring{A}\right)^s \subset A^s &= \bar{\mathring{A}} - \mathring{\mathring{A}} \\
&= \bar{\mathring{A}} - \mathring{A} \qquad ... \left(\mathring{\mathring{A}} \in \tau, \mathring{\mathring{A}} = \mathring{A} \right) \\
&\subset \bar{A} - \mathring{A} \quad ... \left(\mathring{A} \subset A \Rightarrow \bar{\mathring{A}} \subset \bar{A} \right) \\
&= A^s
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $A \subset X$ için

$$
\begin{aligned}
\left(\bar{A}\right)^s &= \bar{\bar{A}} - \overset{\circ}{\bar{A}} \\
&= \bar{A} - \overset{\circ}{\bar{A}} \qquad \ldots \left(\bar{\bar{A}} \in \tau^t, \bar{\bar{A}} = \bar{A}\right) \\
&\subset \bar{A} - \mathring{A} \quad \ldots \left(A \subset \bar{A} \Rightarrow \mathring{A} \subset \overset{\circ}{\bar{A}}\right) \\
&= A^s
\end{aligned}
$$

elde edilir. □

Örnek 2.3.11 *(X, τ) topolojik uzayı ve her $A \subset X$ için*

$$
\begin{array}{rccc}
f: & (X, \tau) & \to & (X, \tau) \\
& A & \mapsto & A^s
\end{array}
$$

iyi tanımlı bir fonksiyondur ancak sıra koruyan bir fonksiyon değildir.

Çözüm: $f : (X, \tau) \to (X, \tau)$ dönüşümü her $A, B \subset X$ için

$$A = B \implies A^s = B^s$$

olduğundan iyi tanımlıdır. Şimdi $A \subset B$ için $A^s \subset B^s$ ifadesinin her zaman sağlanmadığını gösterelim. $A = \mathbb{Q}$ ve $B = \mathbb{R}$ olsun. Buradan

$$\mathbb{Q}^s = \bar{\mathbb{Q}} - \mathring{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} - \emptyset = \mathbb{R}$$

ve

$$\mathbb{R}^s = \bar{\mathbb{R}} - \mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R} - \mathbb{R} = \emptyset$$

olduğundan

$$A^s = \mathbb{Q}^s = \mathbb{R} \not\subseteq \emptyset = \mathbb{R}^s = B^s$$

elde edilir. □

Örnek 2.3.12 *(X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $(A \cap B)^s \subset A^s \cup B^s$

(ii) $(A \cup B)^s \subset A^s \cup B^s$

Çözüm: (**i**) $A, B \subset X$ için,

$$
\begin{aligned}
(A \cap B)^s &= (A \cap B)^- - (A \cap B)^\circ \\
&= (A \cap B)^- \cap (X - (A \cap B)^\circ) \\
&= (A \cap B)^- \cap (X - (A \cap B))^- && \dots \Big(X - (A \cap B)^\circ = (X - (A \cap B))^-\Big) \\
&= (A \cap B)^- \cap \Bigg(\underbrace{(X - A)}_{C} \cup \underbrace{(X - B)}_{D}\Bigg)^- && \dots (X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)) \\
&= (A \cap B)^- \cap \Big((X - A)^- \cup (X - B)^-\Big) && \dots \Big((C \cup D)^- = \bar{C} \cup \bar{D}\Big) \\
&\subset (\bar{A} \cap \bar{B}) \cap \Big((X - A)^- \cup (X - B)^-\Big) && \dots \Big((A \cap B)^- \subset \bar{A} \cap \bar{B}\Big) \\
&= \Big((\bar{A} \cap \bar{B}) \cap (X - A)^-\Big) \cup \Big((\bar{A} \cap \bar{B}) \cap (X - B)^-\Big) \\
&\subset \Big(\bar{A} \cap (X - A)^-\Big) \cup \Big(\bar{B} \cap (X - B)^-\Big) && \dots \Big(\bar{A} \cap \bar{B} \subset \bar{A},\, \bar{A} \cap \bar{B} \subset \bar{B}\Big) \\
&= \Big(\bar{A} - \Big(X - (X - A)^-\Big)\Big) \cup \Big(\bar{B} - \Big(X - (X - B)^-\Big)\Big) \\
&= \Big(\bar{A} - \Big(X - \Big(X - \mathring{A}\Big)\Big)\Big) \cup \Big(\bar{B} - \Big(X - \Big(X - \mathring{B}\Big)\Big)\Big) \\
&= \Big(\bar{A} - \mathring{A}\Big) \cup \Big(\bar{B} - \mathring{B}\Big) \\
&= A^s \cup B^s
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$(A \cap B)^s \subset A^s \cup B^s$$

elde edilir.

(**ii**) $A, B \subset X$ için,

$$
\begin{aligned}
(A \cup B)^s &= (A \cup B)^- - (A \cup B)^\circ \\
&= (A \cup B)^- \cap (X - (A \cup B)^\circ) \\
&= (A \cup B)^- \cap (X - (A \cup B))^- && \dots (X - (A \cup B)^\circ = (X - (A \cup B))^-) \\
&= (A \cup B)^- \cap (\underbrace{(X - A)}_{C} \cap \underbrace{(X - B)}_{D})^- && \dots (X - (A \cup B) = (X - A) \cup (X - B)) \\
&\subset (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap ((X - A)^- \cap (X - B)^-) && \dots \Big((C \cap D)^- \subset \bar{C} \cap \bar{D}\Big) \\
&= (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap ((X - A)^- \cap (X - B)^-) && \dots \Big((\bar{A} \cup \bar{B}) = \bar{A} \cup \bar{B}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\bar{A} \cap (X-A)^{-} \underbrace{\cap (X-B)^{-}}\right) \cup \left(\bar{B} \underbrace{\cap (X-A)^{-}} \cap (X-B)^{-}\right) \\
&\subset \left(\bar{A} \cap (X-A)^{-}\right) \cup \left(\bar{B} \cap (X-B)\right)^{-} \\
&= \left(\bar{A} - (X-(X-A)^{-})\right) \cup \left(\bar{B} - (X-(X-B)^{-})\right) \\
&= \left(\bar{A} - \left(X - \left(X - \mathring{A}\right)\right)\right) \cup \left(\bar{B} - \left(X - \left(X - \mathring{B}\right)\right)\right) \\
&= \left(\bar{A} - \mathring{A}\right) \cup \left(\bar{B} - \mathring{B}\right) \\
&= A^{s} \cup B^{s}
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$(A \cup B)^{s} \subset A^{s} \cup B^{s}$$

elde edilir. □

2.4 Bir Kümenin Yığılma Noktaları Kümesi

Tanım 2.4.1 *(X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ alt küme olmak üzere, bir $x \in X$ noktasının her komşuluğunda A kümesine ait x noktasından farklı en az bir eleman varsa $x \in X$ noktasına A kümesinin* ***yığılma noktası*** *denir. A kümesinin yığılma noktalarının kümesine, A kümesinin* ***yığılma noktaları kümesi*** *denir ve $A^{\sim}$ ile gösterilir.*

$$x \in A^{\sim} \iff \forall V \in \vartheta_{(x)},\ A \cap (V - \{x\}) \neq \emptyset$$

$$x \notin A^{\sim} \iff \exists V \in \vartheta_{(x)},\ A \cap (V - \{x\}) = \emptyset$$

Uyarı 2.4.2 *Bir noktanın her komşuluğu ile noktayı içeren açık küme arasında birebir bir eşleme mümkün olduğundan yığılma noktası kriterleri*

$$x \in A^{\sim} \iff \forall U \in \tau \ \ni x \in U,\ A \cap (U - \{x\}) \neq \emptyset$$

$$x \notin A^{\sim} \iff \exists U \in \tau \ni x \in U,\ A \cap (U - \{x\}) = \emptyset$$

olarak verilebilir.

Örnek 2.4.3 $X = \{a, b, c, d, e\}$ *kümesi üzerinde*

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

ailesi bir topoloji belirtir. $A = \{b, c, d\}$ *kümesinin hangi noktalarının yığılma noktası olduğunu inceleyelim.*

Çözüm:

- $a \in X$ noktası için $U_1 = \{a\} \in \tau$ açık kümesi için $A \cap (U_1 - \{a\}) = \emptyset$ olduğundan $a \notin A^{\sim}$ olur.
- $b \in A$ noktası için $U_2 = \{a, b\} \in \tau$ açık kümesi için $A \cap (U_2 - \{b\}) = \emptyset$ olduğundan $b \notin A^{\sim}$ olur.
- $c \in A$ noktası için $U_3 = \{c\} \in \tau$ açık kümesi için $A \cap (U_3 - \{c\}) = \emptyset$ olduğundan $c \notin A^{\sim}$ olur.
- $d \in A$ noktasını içeren açık kümeler $V_1 = \{c, d\}$, $V_2 = \{a, c, d\}$ ve $V_3 = \{a, b, c, d\}$ için

$$A \cap (V_1 - \{d\}) = \{c\} \neq \emptyset$$

$$A \cap (V_2 - \{d\}) = \{c\} \neq \emptyset$$

$$A \cap (V_3 - \{d\}) = \{b, c\} \neq \emptyset$$

olduğundan $d \in A^{\sim}$ olur.

- $e \in X$ noktasını içeren tek açık küme X için $A \cap (X - \{e\}) = A \neq \emptyset$ olduğundan $e \in A^{\sim}$ olur.

Sonuç olarak $A^{\sim} = \{d, e\}$ olarak bulunur.

□

Uyarı 2.4.4 *Yığılma noktası kümeye ait olmayabilir.*

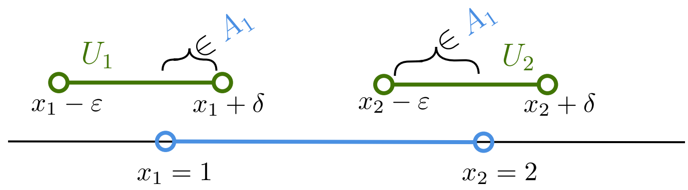
Örnek 2.4.5 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında*

$$A_1 =]1, 2[, \;\; A_2 =]1, 2], \;\; A_3 = [1, 2[, \;\; A_4 = [1, 2]$$

kümelerinin yığılma noktalarını inceleyelim.

Çözüm:

- $x_1 = 1, x_2 = 2 \in \mathbb{R}$ noktalarını inceleyelim. $\varepsilon, \delta > 0$ olmak üzere $U_1 =]x_1 - \varepsilon, x_1 + \delta[$, $U_2 =]x_2 - \varepsilon, x_2 + \delta[\in \mathcal{U}$ açık kümeleri için
$$A \cap (U_1 - \{x_1\}) =]x_1, x_1 + \delta[\neq \emptyset \quad \text{ve} \quad A \cap (U_2 - \{x_2\}) =]x_2 - \varepsilon, x_2[\neq \emptyset$$
olduğundan $x_1, x_2 \in A^{\sim}$ olur.

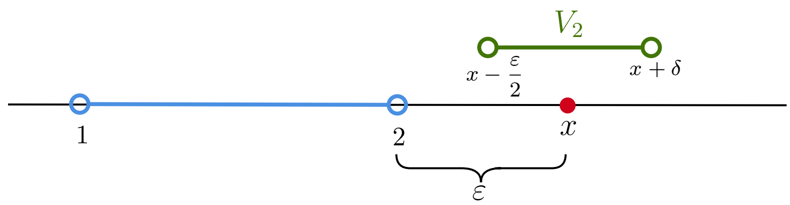


$$A_1 \cap (\overset{\in \mathcal{U}}{U_i} - \{x_i\}) \neq \emptyset \quad (i = 1, 2)$$

$x < 1$ için $x \neq 1$ olduğundan $d(1, x) = \varepsilon$ olacak şekilde bir ε reel sayısı vardır. $\delta > 0$ olmak üzere $V_1 = \left]x - \delta, x + \frac{\varepsilon}{2}\right[\in \mathcal{U}$ açık kümesi için $A \cap (V_1 - \{x\}) = \emptyset$ olur. Buradan $x < 1$ için $x \notin A^{\sim}$ elde ederiz.

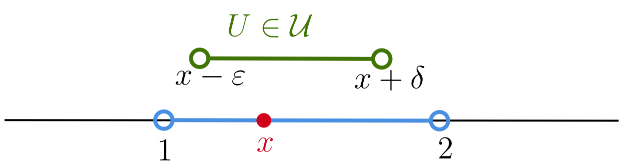
$$A_1 \cap (\overset{\in \mathcal{U}}{V_1} - \{x\}) = \emptyset$$

$x > 2$ için $x \neq 2$ olduğundan $d(2, x) = \varepsilon$ olacak şekilde bir ε reel sayısı vardır. $\delta > 0$ olmak üzere $V_2 = \left]x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \delta\right[\in \mathcal{U}$ açık kümesi için $A \cap (V_2 - \{x\}) = \emptyset$ olur. Buradan $x > 2$ için $x \notin A^{\sim}$ elde ederiz.



$$A_1 \cap (\overset{\in \mathcal{U}}{V_2} - \{x\}) = \emptyset$$

$1 < x < 2$ için $\varepsilon, \delta > 0$ olmak üzere $U =]x - \varepsilon, x + \delta[\in \mathcal{U}$ açık kümesi için $A \cap (U - \{x\}) = A \cap \big(]x - \varepsilon, x+[\cup]x, x + \delta[\big) \neq \emptyset$ olur. Buradan $1 < x < 2$ için $x \in A^{\sim}$ elde ederiz.



$$A_1 \cap (\overset{\in \mathcal{U}}{U} - \{x\}) \neq \emptyset$$

Sonuç olarak A_1 kümesinin yığılma noktaları kümesini

$$A_1^{\sim} = [1,2]$$

olarak elde ederiz.

- Benzer şekilde A_2, A_3, A_4 kümelerinin yığılma noktaları kümeleri

$$A_2^{\sim} = A_3^{\sim} = A_4^{\sim} = [1,2]$$

olarak elde edilir.

$\square$

Sonuç 2.4.6 *Farklı kümelerin yığılma noktaları kümeleri aynı olabilir.*

Lemma 2.4.7 *Bir topolojik uzayda her yığılma noktası kapanış noktasıdır.*

$$A^{\sim} \subset \overline{A}$$

Çözüm: (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ alt küme olmak üzere, $x \in A^{\sim}$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} x \in A^{\sim} \quad &\Rightarrow \quad \forall V \in \vartheta_{(x)} \ A \cap (V - \{x\}) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \quad \forall V \in \vartheta_{(x)} \ A \cap V \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \quad x \in \overline{A} \\ &\Rightarrow \quad A^{\sim} \subset \overline{A} \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Uyarı 2.4.8 (X, τ) *topolojik uzay ve* $A \subset X$ *alt küme olmak üzere*

$$x \notin \overline{A} \Rightarrow x \notin A^{\sim}$$

olacağından bir kümenin yığılma noktaları kümesi incelenirken kapanış noktası olmayan noktaları incelemeye gerek yoktur. Bir nokta kümenin kapanış noktası değilse kümenin yığılma noktası da olamaz.

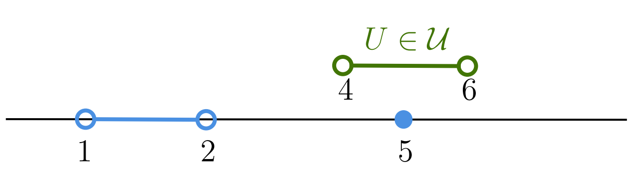
Uyarı 2.4.9 $\overline{A} \subset A^{\sim}$ *ifadesi her zaman sağlanmayabilir. Örneğin* $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında* $A =]1,2[\cup \{5\}$ *olsun.* $5 \in \mathbb{R}$ *noktası için* $A \subset \overline{A}$ *olduğundan* $5 \in \overline{A}$ *olur. Ancak* $U =]4,6[\in \mathcal{U}$ *açık kümesi için*

$$U \in \vartheta_{(x)}, \ A \cap (V - \{5\}) = \emptyset$$

olduğundan $5 \notin A^{\sim}$ *olur. Sonuç olarak*

$$\exists x \in \overline{A} \ \ni x \notin A^{\sim}$$

olduğundan $\bar{A} \not\subseteq A^{\sim}$ *elde edilir.*



$$5 \in \overset{\in \mathcal{U}}{U} \subset U \Rightarrow U \in \vartheta_{(5)}$$

$$A \cap (U - \{5\}) = \emptyset$$

Örnek 2.4.10 (X, τ) *topolojik uzay ve* $A \subset X$ *alt küme olmak üzere*

$$x \in \bar{A} \ \wedge \ x \notin A \Rightarrow x \in A^{\sim}$$

olur.

Çözüm: $x \in \bar{A}$ ve $x \notin A$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} x \in \bar{A} &\Rightarrow \forall V \in \vartheta_{(x)} \ A \cap V \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \forall V \in \vartheta_{(x)} \ A \cap (V - \{x\}) \neq \emptyset \quad ...(x \notin A) \\ &\Rightarrow x \in A^{\sim} \end{aligned}$$

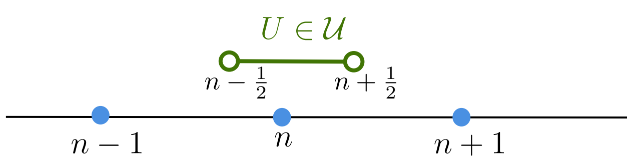
elde edilir. $\square$

Örnek 2.4.11 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında* $\mathbb{Z}$ *tam sayılar kümesinin yığılma noktalarını inceleyelim.*

Çözüm: $\mathbb{Z}$ kümesinin kapanışını $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ olduğundan (örnek 2.2.11) $x \notin \bar{\mathbb{Z}}$ için $x \notin \mathbb{Z}^{\sim}$ olur. $n \in \mathbb{Z}$ olsun. $U =]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[\in \mathcal{U}$ açık kümesi için

$$\mathbb{Z} \cap (U - \{n\}) = \emptyset$$

olduğundan $n \notin \mathbb{Z}^{\sim}$ olur.



$$n \in \overset{\in \mathcal{U}}{U} \subset U \Rightarrow U \in \vartheta_{(n)}$$

$$\mathbb{Z} \cap (U - \{n\}) = \emptyset$$

Sonuç olarak $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesinin yığılma noktaları kümesi

$$\mathbb{Z}^{\sim} = \emptyset$$

olarak bulunur.

$\square$

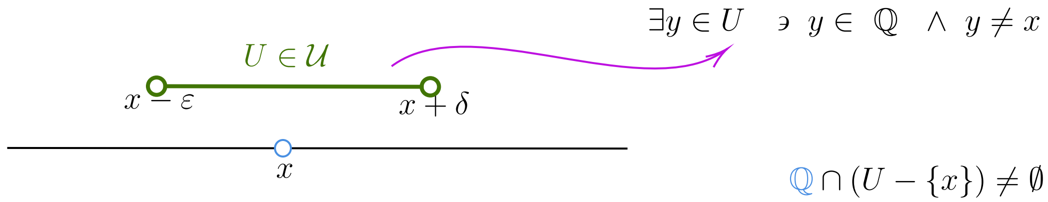
Örnek 2.4.12 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında* $\mathbb{N}$ *doğal sayılar kümesinin yığılma noktaları kümesi* $\mathbb{N}^{\sim} = \emptyset$ *olur.*

Örnek 2.4.13 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında* $\mathbb{Q}$ *rasyonel sayılar kümesinin yığılma noktalarını inceleyelim.*

Çözüm: $x \in \mathbb{R}$ olsun. $\varepsilon, \delta > 0$ olmak üzere $U =]x - \varepsilon, x + \delta[\in \mathcal{U}$ açık kümesi için sonsuz sayıda rasyonel sayı içerdiğinden

$$U \cap (\mathbb{R} - \{x\}) \neq \emptyset$$

olur.



Sonuç olarak rasyonel sayılar kümesinin yığılma noktaları kümesi

$$\mathbb{Q}^{\sim} = \mathbb{R}$$

olur. □

Örnek 2.4.14 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında* $\mathbb{Q}^t$ *irrasyonel sayılar kümesinin yığılma noktaları kümesi* $\mathbb{Q}^{t\sim} = \mathbb{R}$ *olur.*

Örnek 2.4.15 $(\mathbb{R}, \mathcal{D}^{\rightarrow})$ *uzayında* $A = \{5, 6\} \cup [7, 8[$ *kümesinin yığılma noktalarını inceleyelim.*

Çözüm: $(\mathbb{R}, \mathcal{D}^{\rightarrow})$ uzayında $\bar{A}$ kümesi A kümesini kapsayan en küçük kapalı küme olacağından Burada

$$\bar{A} =]-\infty, 8]$$

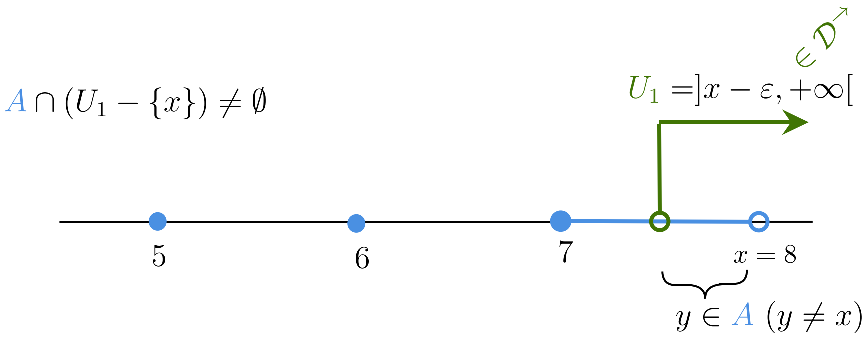
olur.

$$x \notin \bar{A} \Rightarrow x \notin A^{\sim}$$

olduğundan $x > 8$ için $x \notin A^{\sim}$ olacağı açıktır. $x \leqslant 8$ noktaları için inceleyelim. $x \leqslant 8$ olsun. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $U_1 =]x - \varepsilon, +\infty[\in \mathcal{D}^{\rightarrow}$ açık kümesi için

$$A \cap (U_1 - \{x\}) \neq \emptyset$$

olduğundan $x \leqslant 8$ için $x \in A^{\sim}$ olur.



Sonuç olarak $(\mathbb{R}, \mathcal{D}^{\rightarrow})$ uzayında $A = \{5, 6\} \cup [7, 8[$ kümesinin yığılma noktaları kümesi

$$A^{\sim} =]-\infty, 8]$$

olur. $\square$

Örnek 2.4.16 *X kümesi birden fazla eleman içeren bir küme olmak üzere $(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık(ince) uzayında bir $A \subset X$ alt kümesi için $A^{\sim} = \emptyset$ olur.*

Çözüm: $x \in X$ noktası için ayrık uzayda her küme açık küme olduğundan
$U = \{x\} \in \mathcal{P}(X)$ açık kümesi için

$$U \cap (A - \{x\}) = \emptyset$$

olur. Her $x \in X$ için $x \notin A^{\sim}$ olacağından

$$A^{\sim} = \emptyset$$

olur. $\square$

Örnek 2.4.17 *X kümesi boş kümeden farklı bir küme olmak üzere $(X, \mathcal{I} = \{\emptyset, X\})$ kaba(ayrık olmayan) uzayında bir $A \subset X$ alt kümesi için $A^{\sim} = X$ veya $A^{\sim} = \emptyset$ olur.*

Çözüm: $x \in X$ noktası için kaba uzayda x noktasını içeren tek açık küme X olduğundan
$U = X \in \mathcal{I}$ açık kümesi için eğer A kümesi birden fazla nokta içeriyorsa

$$U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$$

olur. Her $x \in X$ için $x \in A^{\sim}$ olacağından

$$A^{\sim} = X$$

olur. Eğer A kümesi tek nokta içeriyorsa $a \in A$ noktası için

$$U \cap (A - \{a\}) = \emptyset$$

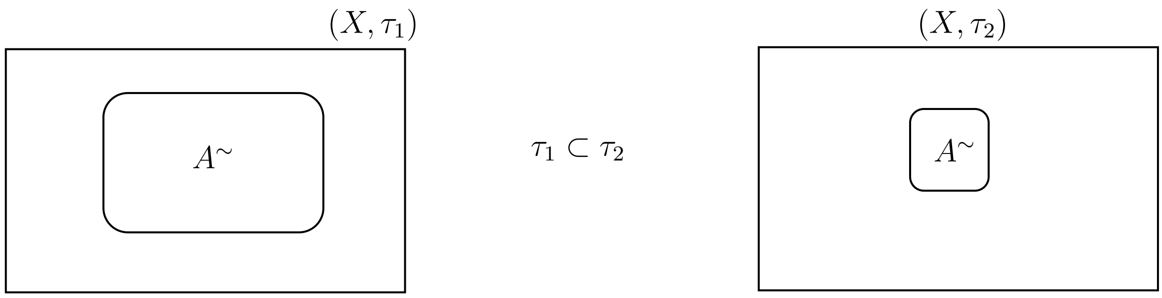
olacağından

$$A^{\sim} = \emptyset$$

olur. $\square$

Sonuç 2.4.18 *Topoloji kabalaştıkça bir kümenin yığılma noktaları kümesi büyür. Topoloji inceldikçe bir kümenin yığılma noktaları kümesi küçülür.*

$$\tau_1 \subset \tau_2 \Rightarrow A^{\sim}_{\tau_2} \subset A^{\sim}_{\tau_1}$$



Örnek 2.4.19 *Bir* (X, τ) *topolojik uzayı ve her* $A \subset X$ *için*

$$\begin{array}{rccc} f: & (X,\tau) & \rightarrow & (X,\tau) \\ & A & \mapsto & A^{\sim} \end{array}$$

iyi tanımlı ve sıra koruyan bir fonksiyondur.

Çözüm: $f : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$ dönüşümü her $A, B \subset X$ için

$$A = B \implies A^{\sim} = B^{\sim}$$

olduğundan iyi tanımlı bir fonksiyondur. Sıra koruyan olduğunu göstermek için

$$A \subset B \Rightarrow A^{\sim} \subset B^{\sim}$$

olduğunu gösterelim. $A \subset B$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} x \in A^{\sim} &\Rightarrow \forall V \in \vartheta_{(x)}\ A \cap (V - \{x\}) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \forall V \in \vartheta_{(x)}\ B \cap (V - \{x\}) \neq \emptyset \quad ...(A \subset B) \\ &\Rightarrow x \in B^{\sim} \\ &\Rightarrow A^{\sim} \subset B^{\sim} \end{aligned}$$

olduğundan f sıra koruyan bir fonksiyondur. □

Teorem 2.4.20 (X, τ) *topolojik uzay ve* $A \subset X$ *alt küme olmak üzere* $A \cup A^{\sim}$ *kümesi kapalı bir kümedir.*

İspat. $A \cup A^{\sim}$ kümesinin kapalı küme olduğunu göstermek için tümleyeninin açık küme olacağını gösterelim. Buradan

$$
\begin{aligned}
x \in X - (A \cup A^{\sim}) \quad &\Rightarrow \quad x \notin A \cup A^{\sim} \\
&\Rightarrow \quad \exists V \in \vartheta_{(x)},\ A \cap (V - \{x\}) = \emptyset && \ldots (x \notin A^{\sim}) \\
&\overset{x \notin A}{\Rightarrow} \quad \exists V \in \vartheta_{(x)},\ A \cap V = \emptyset && (1) \\
&\Rightarrow \quad \forall y \in V, y \notin A^{\sim} && \ldots (\ A \cap V = \emptyset) \\
&\Rightarrow \quad A^{\sim} \cap V = \emptyset && (2) \\
&\Rightarrow \quad \underbrace{V \subset X - A}_{(1)\ ifadesinden} \wedge \underbrace{V \subset X - A^{\sim}}_{(2)\ ifadesinden} \\
&\Rightarrow \quad V \subset (X - A) \cap (X - A^{\sim}) \\
&\Rightarrow \quad \underbrace{V}_{\in \vartheta_{(x)}} \subset X - (A \cup A^{\sim}) && \ldots (\text{De Morgan}) \\
&\overset{x \in V}{\Rightarrow} \quad x \in (X - (A \cup A^{\sim}))^{\circ} && \ldots \begin{pmatrix} \text{Noktayı içeren komşuluğu} \\ \text{içeren küme} \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \quad X - (A \cup A^{\sim}) \in \tau && \ldots (\forall x \in X - (A \cup A^{\sim})) \\
&\Rightarrow \quad A \cup A^{\sim} \in \tau^{t}
\end{aligned}
$$

elde edilir. □

Teorem 2.4.21 (X, τ) *topolojik uzay ve* $A \subset X$ *alt küme olmak üzere* $A \cup A^{\sim} = \overline{A}$ *olur.*

İspat. A kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $\overline{A}$ ve $A \cup A^{\sim}$ kapalı küme olduğundan $A \subset X$ için

$$
\begin{aligned}
A \subset X \quad &\Rightarrow \quad A \subset \overline{A} \text{ ve } A \subset A \cup A^{\sim} \\
&\Rightarrow \quad \overline{A} \subset A \cup A^{\sim} \qquad\qquad (1)
\end{aligned}
$$

olur. Tersine her yığılma noktası bir kapanış noktası olduğundan $A \subset X$ için

$$
\begin{aligned}
A \subset X \quad &\Rightarrow \quad A^{\sim} \subset \overline{A} \text{ ve } A \subset \overline{A} \quad \ldots \left(\square \subset \overline{\square} \right) \\
&\Rightarrow \quad A \cup A^{\sim} \subset \overline{A} \qquad\qquad (2)
\end{aligned}
$$

olur. (1) ve (2) ifadelerinden

$$A \cup A^{\sim} = \overline{A}$$

elde edilir. □

Teorem 2.4.22 *(X,τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ alt küme olmak üzere A kümesinin kapalı küme olması için gerek ve yeter şart $A^{\sim} \subset A$ olmasıdır.*

$$A \in \tau^t \Leftrightarrow A^{\sim} \subset A$$

İspat. $\Rightarrow$ A kümesi (X,τ) topolojik uzayında kapalı bir küme olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
A \in \tau^t &\Rightarrow X - A \in \tau \\
&\Rightarrow \forall x \in X - A,\ \exists V \in \vartheta_{(x)}\ ,\ x \in V \subset X - A \\
&\Rightarrow X - A \in \vartheta_{(x)},\ A \cap ((X - A) - \{x\}) = \emptyset && \ldots (x \notin A) \\
&\Rightarrow \underbrace{x \in X - A}_{p} \text{ için } \underbrace{x \notin A^{\sim}}_{\sim q} \\
&\Rightarrow (x \in A^{\sim} \Rightarrow x \in A) && \ldots (p \Rightarrow \sim q \Leftrightarrow q \Rightarrow \sim p) \\
&\Rightarrow A^{\sim} \subset A
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\Leftarrow$ $A^{\sim} \subset A$ olsun. Kabul edelim ki $\bar{A} \not\subset A$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
\bar{A} \not\subset A &\Rightarrow \exists x \in \bar{A},\ \ni x \notin A \\
&\Rightarrow x \notin A^{\sim} && \ldots (A^{\sim} \subset A) \\
&\Rightarrow \exists V \in \vartheta_{(x)},\ A \cap (V - \{x\}) = \emptyset \\
&\Rightarrow \exists V \in \vartheta_{(x)},\ A \cap V = \emptyset && \ldots (x \notin A) \\
&\Rightarrow x \notin \bar{A}
\end{aligned}$$

$x \notin \bar{A}$ olması kabulümüz ile çelişir. Dolayısıyla $\bar{A} \subset A$ olmalıdır. $A \subset \bar{A}$ her zaman sağlandığından $\bar{A} = A$ olur. Kapanışı kendisine eşit olan küme kapalı küme olduğundan

$$A \in \tau^t$$

olur. □

Sonuç 2.4.23 *Kapalı bir küme bütün yığılma noktalarına sahiptir.*

Teorem 2.4.24 *(X,τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $X^{\sim} = X$ *ve* $\emptyset^{\sim} = \emptyset$

(ii) $(A^{\sim})^{\sim} \subset \bar{A}$

(iii) *Her $x \in X$ noktası için $x \notin \{x\}^{\sim}$*

(iv) $(A \cup B)^{\sim} = A^{\sim} \cup B^{\sim}$

(v) $(A \cap B)^{\sim} \subset A \cap B^{\sim}$

İspat. (**i**) Her topolojik uzayda $X \in \tau^t$ ve kapalı kümeler bütün yığılma noktalarına sahip olduğundan

$$X^{\sim} = X$$

elde edilir. $\overline{\emptyset} = \emptyset \cup \emptyset^{\sim}$ ve $\overline{\emptyset} = \emptyset$ olduğundan

$$\emptyset^{\sim} = \emptyset$$

elde edilir.

(**ii**) $x \in (A^{\sim})^{\sim}$ olsun. $x \in A$ ise $A \subset \overline{A}$ olacağından $x \in \overline{A}$ olur. $x \notin A$ için

$$\begin{aligned} x \in (A^{\sim})^{\sim} \quad &\Rightarrow \quad \forall V \in \vartheta_{(x)},\ A^{\sim} \cap (V - \{x\}) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \quad \exists y \in A^{\sim} \cap V,\ \ni x \neq y \\ &\overset{y \in A^{\sim}}{\Rightarrow} \quad \forall U \in \vartheta_{(y)},\ A \cap (V - \{y\}) \neq \emptyset \\ &\overset{y \in V}{\Rightarrow} \quad \forall V \in \vartheta_{(x)},\ A \cap (V - \{x\}) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \quad x \in A^{\sim} \end{aligned}$$

olacağından

$$\begin{aligned} (x \in A) \vee (x \notin A \Rightarrow x \in A^{\sim}) \quad &\Rightarrow \quad x \in A \cup A^{\sim} \\ &\Rightarrow \quad x \in \overline{A} \qquad \ldots \left(A \cup A^{\sim} = \overline{A} \right) \end{aligned}$$

olur. Her $x \in (A^{\sim})^{\sim}$ için $x \in \overline{A}$ olduğundan

$$(A^{\sim})^{\sim} \subset \overline{A}$$

elde edilir.

(**iii**) $V \in \vartheta_{(x)}$ için

$$\{x\} - (V - \{x\}) = \emptyset$$

olduğundan

$$x \notin \{x\}^{\sim}$$

elde edilir.

(**iv**) Her $A, B \subset X$ alt kümeleri için, $A \subset A \cup B$ ve $B \subset A \cup B$ yazılabilir. Bir kümenin yığılma noktalarını alma işlemi sıra koruyan bir işlem olduğundan $A^{\sim} \subset (A \cup B)^{\sim}$ ve $B \subset (A \cup B)^{\sim}$ elde edilir. Bir kümenin alt kümelerinin birleşimi yine bir alt küme olacağından

$$A^{\sim} \cup B^{\sim} \subset (A \cup B)^{\sim} \qquad (1)$$

elde edilir. Tersine $x \in (A \cup B)^{\sim}$ olsun. Kabul edelim ki $x \notin A^{\sim} \cup B^{\sim}$ olsun. Buradan

$$
\begin{aligned}
x \notin A^{\sim} \cup B^{\sim} \quad &\Rightarrow \quad x \notin A^{\sim} \text{ ve } x \notin B^{\sim} \\
&\Rightarrow \quad \begin{matrix} \exists V \in \vartheta_{(x)},\ A \cap (V - \{x\}) = \emptyset \\ \exists U \in \vartheta_{(x)}, B \cap (U - \{x\}) = \emptyset \end{matrix} \qquad \cdots \begin{pmatrix} x \bar{\notin} A^{\sim} \\ x \bar{\notin} B^{\sim} \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \quad \exists\, (U \cup V) \in \vartheta_{(x)}, (A \cup B) \cap ((U \cup V) - \{x\}) = \emptyset \\
&\Rightarrow \quad x \notin (A \cup B)^{\sim}
\end{aligned}
$$

$x \notin (A \cup B)^{\sim}$ olması kabulümüz ile çelişir. Dolayısıyla

$$x \in A^{\sim} \cup B^{\sim} \qquad (2)$$

olmalıdır. (1) ve (2) ifadelerinden

$$(A \cup B)^{\sim} = A^{\sim} \cup B^{\sim}$$

elde edilir.

(**v**) Her $A, B \subset X$ alt kümeleri için, $A \cap B \subset A$ ve $A \cap B \subset B$ yazılabilir. Bir kümenin yığılma noktalarını alma işlemi sıra koruyan olduğundan

$$(A \cap B)^{\sim} \subset A^{\sim} \ \wedge \ (A \cap B)^{\sim} \subset B^{\sim}$$

olur. Buradan

$$(A \cap B)^{\sim} \subset A^{\sim} \cap B^{\sim}$$

elde edilir. □

Uyarı 2.4.25 *(X, τ) topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olmak üzere*

$$(A \cap B)^{\sim} \subset A^{\sim} \cap B^{\sim}$$

ifadesinin tersi her zaman sağlanmaz. Örneğin, $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayından $A = \mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ve $B = \mathbb{Q}^t$ irrasyonel sayılar kümesi alınırsa

$$A^{\sim} = \mathbb{R}, B^{\sim} = \mathbb{R}$$

ve

$$(A \cap B)^{\sim} = \emptyset^{\sim} = \emptyset$$

olduğundan

$$\mathbb{R} = A^{\sim} \cap B^{\sim} \nsubseteq (A \cap B)^{\sim} = \emptyset$$

olur.

Örnek 2.4.26 $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *alışılmış uzay* $A \subset \mathbb{R}$ *olmak üzere* $x \in \mathbb{R}$ *noktası* A *kümesinin bir yığılma noktası ise* x *noktasının her komşuluğunda kümeye ait sonsuz sayıda eleman vardır.*

$$x \in A^{\sim} \Rightarrow \forall V \in \vartheta_{(x)},\ A \cap V \ \textit{sonsuz küme}$$

Çözüm: $x \in A^{\sim}$ olsun. Kabul edelim ki x noktasının en az bir komşuluğunda A kümesine ait sonlu sayıda eleman olsun. Bu durumda bir $V \in \vartheta_{(x)}$ koşuluğu için

$$A \cap V = \{x, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

yazılabilir.

$$\varepsilon = min\{d(x,a) : a \in (A \cap (V - \{x\}))\}$$

olmak üzere $V =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ açık kümesi için

$$A \cap V = \{x\}$$

olur. Bu ise $x \in A^{\sim}$ olması ile çelişir. Bu durumda kabulümüz yanlıştır. x noktasının her komşuluğunda A kümesine ait sonsuz sayıda eleman vardır. □

Örnek 2.4.27 (X,τ) *topolojik uzay ve* $A \subset X$ *olmak üzere* x *noktası* A *kümesinin bir yığılma noktası ise* $x \in (A - \{x\})^{-}$ *olur.*

$$x \in A^{\sim} \Rightarrow x \in (A - \{x\})^{-}$$

Çözüm: $x \in A^{\sim}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x \in A^{\sim} &\Rightarrow \forall V \in \vartheta_{(x)},\ A \cap (V - \{x\}) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \forall V \in \vartheta_{(x)}, (A - \{x\}) \cap V \neq \emptyset \\ &\Rightarrow x \in (A - \{x\})^{-} \end{aligned}$$

elde edilir. □

2.5 Bir Kümenin İzole Noktaları Kümesi

Tanım 2.5.1 *(X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ alt küme olmak üzere bir $x \in A$ noktasının en az bir komşuluğunda A kümesine ait x noktasından farklı bir elemanı bulunmuyorsa $x \in A$ noktasına A kümesinin **izole noktası** denir. A kümesinin izole noktalarının kümesine, A kümesinin **izole noktaları kümesi** denir ve $izole(A)$ ile gösterilir.*

$$x \in izole(A) \iff \exists V \in \vartheta_{(x)} \ \ni \ A \cap V = \{x\}$$

$$x \notin izole(A) \iff \forall V \in \vartheta_{(x)}, \ A \cap V \neq \{x\}$$

Uyarı 2.5.2 *Yığılma noktası, kapanış noktası ve izole noktanın tanımdan izole nokta olmayan kapanış noktalarının yığılma noktası olacağı açıktır.*

$$x \in \bar{A} \ \wedge \ x \notin izole(A) \Rightarrow x \in A^{\sim}$$

Önerme 2.5.3 *(X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ alt küme olmak üzere*

$$izole(A) = A - A^{\sim}$$

olur.

İspat. $\Rightarrow$ $x \in izole(A)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
x \in izole(A) &\Rightarrow \exists V \in \vartheta_{(x)} \ \ni \ A \cap V = \{x\} \\
&\Rightarrow \exists V \in \vartheta_{(x)} \ \ni \ A \cap (V - \{x\}) = \emptyset \\
&\Rightarrow x \notin A^{\sim} \\
&\Rightarrow x \in A - A^{\sim} \qquad \ldots (A \cap V = \{x\} \Rightarrow x \in A)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\Leftarrow$ Tersine $x \in A - A^{\sim}$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
x \in A - A^{\sim} &\Rightarrow x \in A \text{ ve } x \notin A^{\sim} \\
&\Rightarrow \exists V \in \vartheta_{(x)} \ \ni \ A \cap (V - \{x\}) = \emptyset \qquad \ldots (\ x \notin A^{\sim}) \\
&\Rightarrow \exists V \in \vartheta_{(x)} \ \ni A \cap V = \{x\} \qquad \ldots \begin{pmatrix} V \in \vartheta_{(x)} \Rightarrow x \in V \\ x \in A \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow x \in izole(A)
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Tanım 2.5.4 *Bir topolojik uzayda hiçbir izole noktası olmayan kapalı kümeye mükemmel küme denir.*

Örnek 2.5.5 $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında her* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *kapalı aralığı mükemmel kümedir.*

Çözüm: $x \in [a,b]$ için

$$\forall V \in \vartheta_{(x)},\ [a,b] \cap (V - \{x\}) \neq \emptyset$$

olduğundan

$$[a,b]^{\sim} = [a,b]$$

olur. Buradan

$$izole\,([a,b]) = [a,b] - [a,b]^{\sim} = \emptyset$$

olacağından $[a,b]$ kapalı aralığı mükemmel küme olur. □

Lemma 2.5.6 (X,τ) *topolojik uzay ve* $A \subset X$ *alt küme olmak üzere* $x \in A$ *için*

$$x \notin izole(A) \implies x \in A^{\sim}$$

olur.

İspat. $x \in A$ ve $x \notin izole(A)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} x \notin izole(A) &\implies \forall V \in \vartheta_{(x)},\ A \cap V \neq \{x\} \\ &\implies \exists y \in A \cap V \ \ni x \neq y \qquad \cdots \begin{pmatrix} A \cap V \neq \{x\} \\ x \in A \wedge x \in V \end{pmatrix} \\ &\implies \forall V \in \vartheta_{(x)},\ A \cap (V - \{x\}) \neq \emptyset \\ &\implies x \in A^{\sim} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç 2.5.7 (X,τ) *topolojik uzay ve* $A \subset X$ *alt küme olmak üzere* $x \in A$ *için*

$$x \notin A^{\sim} \implies x \in izole(A)$$

olur.

Örnek 2.5.8 $X = \{a,b,c,d,e\}$ *kümesi üzerinde*

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,c,d\}\}$$

ailesi bir topoloji belirtir. (X,τ) *uzayında* $A = \{b,c,d\}$ *kümesinin hangi noktalarının izole nokta olduğunu inceleyelim.*

Çözüm:

- $b \in A$ noktası için $b \in U = \{a, b\} \in \tau$ açık kümesi için $U \subset U$ olduğundan $U \in \vartheta_{(b)}$ olur. $U \cap A = \{b\}$ olduğundan $b \in izole(A)$ olur.

- $c \in A$ noktası için $b \in U = \{c\} \in \tau$ açık kümesi için $U \subset U$ olduğundan $U \in \vartheta_{(c)}$ olur. $U \cap A = \{c\}$ olduğundan $c \in izole(A)$ olur.

- $d \in A$ noktası için $d \in U$ açık kümesi için $c \in U$ olduğundan $U \cap A \neq \{d\}$ olduğundan $d \notin izole(A)$ olur.

Sonuç olarak $izole(A) = \{b, c\}$ olarak bulunur.

$\square$

Örnek 2.5.9 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında*

$$A =]1, 2[\cup \{3, 5\}$$

kümesinin izole noktalarını inceleyelim.

Çözüm:

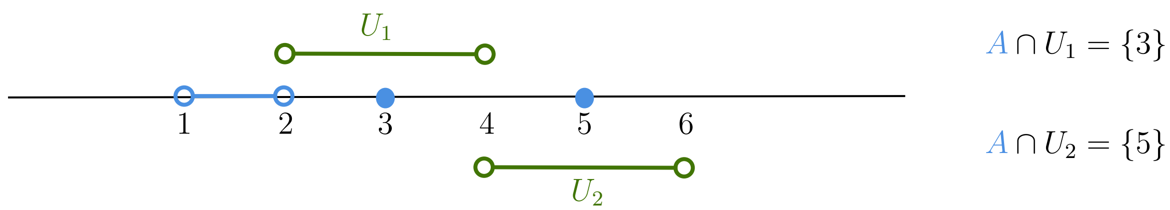
- $1 < x < 2$ olsun. Her

$$\forall V \in \vartheta_{(x)}, \ A \cap (V - \{x\}) \neq \emptyset$$

olduğundan $x \notin izole(A)$ olur.

- $3 \in A$ noktasını alalım. $U_1 =]2, 4[\in \mathcal{U}$ açık kümesi için $A \cap U_1 = \{3\}$ olduğundan $x \in izole(A)$ olur.

- $5 \in A$ noktasını alalım. $U_2 =]4, 6[\in \mathcal{U}$ açık kümesi için $A \cap U_2 = \{5\}$ olduğundan $x \in izole(A)$ olur.



Sonuç olarak A kümesinin izole noktalarının kümesi

$$izole(A) = \{3, 5\}$$

olarak bulunur. $\square$

Örnek 2.5.10 $(\mathbb{R}, \mathcal{D}^{\rightarrow})$ *uzayında* $A = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup]2, 3] \cup \{4, 6\}$ *kümesinin izole noktalarını inceleyelim.*

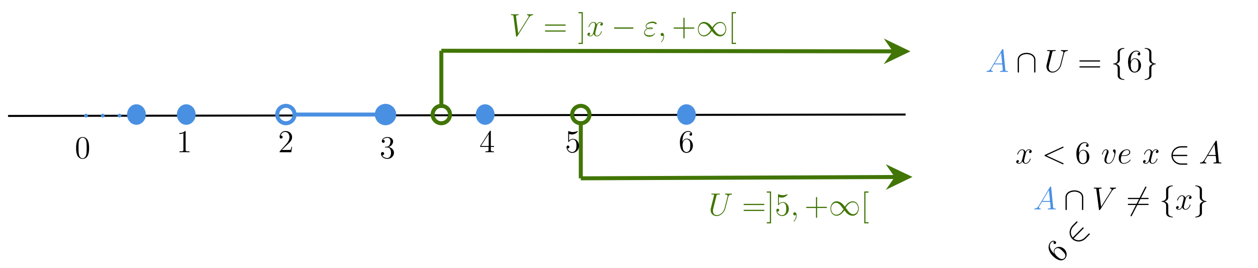
Çözüm:

- $6 \in A$ noktasını alalım. $U =]5, +\infty[\in \mathcal{D}^{\rightarrow}$ açık kümesi için $A \cap U = \{6\}$ olduğundan $6 \in izole(A)$ olur.

- $x < 6$ olsun. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $\forall V =]x - \varepsilon, +\infty[$ açık kümesi için

$$A \cap V \neq \{x\} \qquad ...(6 \in A \cap V, x \neq 6)$$

  olduğundan $x \notin izole(A)$ olur.



Sonuç olarak A kümesinin izole noktalarının kümesi

$$izole(A) = \{6\}$$

olarak bulunur. $\square$

Örnek 2.5.11 $(\mathbb{R}, {}^{\leftarrow}\mathcal{D})$ *uzayında* $A = [2, 3]$ *kümesinin izole noktalarını inceleyelim.*

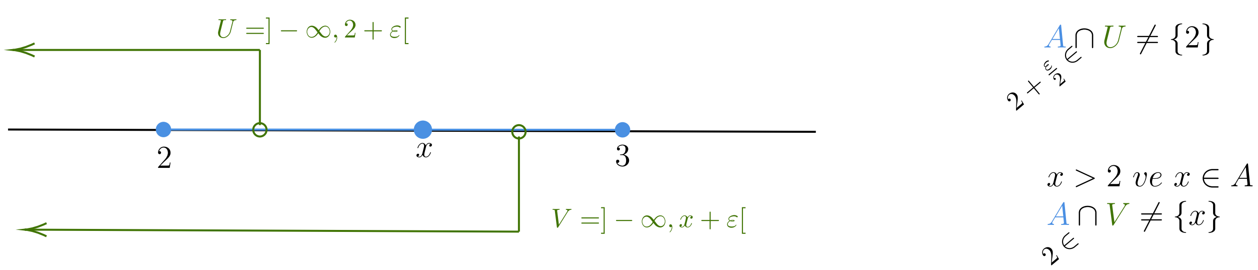
Çözüm:

- $2 \in A$ noktasını alalım. $\varepsilon > 0$ olmak üzere her $U =]-\infty, 2 + \varepsilon[$ açık kümesi için $A \cap U \neq \{2\}$ olduğundan $2 \notin izole(A)$ olur.

- $x > 2$ ve $x \in A$ olsun. $\varepsilon > 0$ olmak üzere her $V =]-\infty, x + \varepsilon[$ açık kümesi için

$$A \cap V \neq \{x\} \qquad ...(2 \in A \cap V, 2 \neq x)$$

  olduğundan $x \notin izole(A)$ olur.



Sonuç olarak A kümesinin izole noktalarının kümesi

$$izole(A) = \emptyset$$

olarak bulunur. $\square$

Örnek 2.5.12 *X kümesi birden fazla eleman içeren bir küme olsun. $(X, \mathcal{P}(X))$ ayrık uzay ve $A \subset X$ olmak üzere*

$$\forall a \in A, \quad a \in \{a\} \in \mathcal{P}(X) \text{ için } A \cap \{a\} = \{a\}$$

olduğundan $a \in izole(A)$ olur. Sonuç olarak ayrık uzayda kümenin her noktası izole nokta olduğundan

$$izole(A) = A$$

olur.

Örnek 2.5.13 *X kümesi birden fazla eleman içeren bir küme olmak üzere $(X, \mathcal{I} = \{\emptyset, X\})$ kaba (ayrık olmayan) uzayında bir $A \subset X$ alt kümesi için $a \in A$ noktasını kapsayan tek açık küme X olduğundan*

$$\forall a \in A, \quad a \in X \in \mathcal{I} \text{ için } A \cap X \neq \{a\}$$

olduğundan $a \notin izole(A)$ olur. Sonuç olarak kaba uzayda kümenin hiçbir noktası izole nokta olmaz. Sonuç olarak

$$izole(A) = \emptyset$$

olur.

Sonuç 2.5.14 *Topoloji inceleştikçe bir kümenin izole noktaları kümesi büyür. Topoloji kabalaştıkça bir kümenin izole noktaları kümesi küçülür.*

$$\tau_1 \subset \tau_2 \Rightarrow izole(A)_{\tau_1} \subset izole(A)_{\tau_2}$$

2.6 Türev Kümeleri Uygulamaları

(X, τ) topolojik uzayında bir $A \subset X$ alt kümesinden türetilen

- A kümesinin içi, $\overset{\circ}{A}$
- A kümesinin kapanışı, $\overline{A}$
- A kümesinin dışı, dış$(A) = (X - A)^\circ$
- A kümesinin sınırı, A^s
- A kümesinin yığılma noktaları kümesi, $A^\sim$

- A kümesinin izole noktaları kümesi, $izole(A)$

ve benzeri kümeleri A kümesinin **türev kümeleri** olarak adlandıracağız.

Not. (X,τ) topolojik uzayında bir $A \subset X$ alt kümesinin türev kümelerini incelediğimizde kontrol etmemiz gerekenleri ve incelerken yardımcı olacak bilgileri aşağıdaki gibi özetleyebiliriz.

(**i**) A kümesinin içi her zaman açık bir küme olmalı ve A kümesi tarafından kapsanmalıdır.

$$\overset{\circ}{A} \in \tau \text{ ve } \overset{\circ}{A} \subset A$$

(**ii**) A kümesinin kapanışı her zaman kapalı bir küme olmalı ve A kümesini kapsamalıdır.

$$\bar{A} \in \tau^t \text{ ve } A \subset \bar{A}$$

(**iii**) A kümesinin dışı her zaman açık bir küme olmalı. $(X-A)^\circ = X - \bar{A}$ olduğundan A kümesinin tümleyeninin ifadesi karmaşık ise A kümesinin kapanışının tümleyeni alınarak bulunabilir.

$$(X-A)^\circ \in \tau \text{ ve } (X-A)^\circ = X - \bar{A}$$

(**iv**) A kümesinin sınırı her zaman kapalı bir küme olmalı. $A^s = (X-A)^s$ olduğundan A kümesinin sınırı ifadesi karmaşık ise A kümesinin tümleyenin sınırı bulunabilir.

(**v**) A kümesinin yığılma noktaları kümesi A kümesinin kapanışı tarafından kapsanmalıdır. Yığılma noktaları izole nokta olmamalı ve A kümesi ile A kümesinin yığılma noktaları kümesinin birleşimi A kümesinin kapanışına eşit olmalı.

$$A^\sim \subset \bar{A},\ x \notin \bar{A} \Rightarrow x \notin A^\sim$$
$$x \in A^\sim \Rightarrow x \notin izole(A)$$
$$A \cup A^\sim = \bar{A}$$

(**vi**) A kümesinin izole noktaları kümesi A kümesi tarafından kapsanmalıdır. İzole noktalar yığılma noktası olmamalı

$$izole(A) \subset A$$
$$x \in izole(A) \Rightarrow x \notin A^\sim$$

□

Örnek 2.6.1 $X = \{a,b,c,d\}$ *kümesi üzerinde*

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}\}$$

ailesi bir topoloji belirtir. (X,τ) *uzayında* $A = \{b,c\}$ *kümesinin türev kümelerini bulalım.*

Çözüm: (**i**) A kümesinin kapsadığı en büyük açık küme $\{c\}$ olduğundan

$$\mathring{A} = \{c\}$$

olur. Şimdi bunu noktasal olarak inceleyelim.

- $b \in A$ noktasını içeren her V_1 komşuluğu için $a \in V_1$ ve $V_1 \not\subseteq A$ olduğundan $b \notin \mathring{A}$ olur.
- $c \in A$ noktasını içeren en az bir $V_2 = \{c\}$ komşuluğu için $c \in V_2 \subset A$ olduğundan $c \in \mathring{A}$ olur.

Kontrol

$\mathring{A} = \{c\} \in \tau$ $\rightarrow$ Açık küme

$\mathring{A} = \{c\} \subset A$ $\rightarrow$ A kümesi tarafından kapsanır

(**ii**) (X, τ) uzayındaki kapalı kümelerin ailesi

$$\tau^t = \{\emptyset, X, \{b,c,d\}, \{c,d\}, \{a,b,d\}, \{b,d\}, \{d\}, \{a,b\}, \{b\}\}$$

olur. A kümesini kapsayan en küçük kapalı küme $\{b,c,d\}$ olduğundan

$$\bar{A} = \{b,c,d\}$$

olur. Şimdi bunu noktasal olarak inceleyelim.

- $a \in X$ noktasını içeren en az bir $U_1 = \{a\}$ komşuluğu için $U_1 \cap A = \emptyset$ olduğundan $a \notin \bar{A}$ olur.
- $b, c \in A$ için $b, c \in \bar{A}$ olur.
- $d \in X$ noktasını içeren her U_2 komşuluğu için $c \in U_2$ ve $c \in A$ olduğundan $U_2 \cap A \neq \emptyset$ olur. Buradan $d \in \bar{A}$ olur.

Kontrol

$A \subset \bar{A} = \{b, c, d\} \in \tau^t$

Kapalı küme

A kümesini kapsar

(**iii**) A kümesinin dışı A kümesinin kapanışının tümleyeni olacağından

$$\text{dış}A = X - \bar{A} = \{a\}$$

olur.

Kontrol

$\text{dış}(A) = \{a\} = (X - A)^\circ$

Açık küme

(**iv**) A kümesinin sınırı

$$A^s = \bar{A} - \mathring{A} = \{b, c, d\} - \{c\} = \{b, d\}$$

olur.

Kontrol

$A^s = \{b, d\} \in \tau^t$

Kapalı küme

(**v**) A kümesinin yığılma noktalarını inceleyelim.

- $a \notin \bar{A}$ olduğundan $a \notin A^\sim$ olur.
- $b \in A$ noktasını içeren $W_1 = \{a, b\}$ komşuluğu için

$$A \cap (W_1 - \{b\}) = \emptyset$$

olduğundan $b \notin A^\sim$ olur.

- $c \in A$ noktasını içeren $W_2 = \{c\}$ komşuluğu için

$$A \cap (W_2 - \{c\}) = \emptyset$$

olduğundan $c \notin A^{\sim}$ olur.

- $d \in X$ noktasını içeren her W komşuluğunda $c \in W$ için

$$A \cap (W - \{d\}) \neq \emptyset$$

olduğundan $d \in A^{\sim}$ olur.

Sonuç olarak A kümesinin yığılma noktaları kümesi

$$A^{\sim} = \{d\}$$

olur.

Kontrol

$\subset \bar{A}$

$A^{\sim} = \{d\}$

A kümesinin kapanışı tarafından kapsanır

$A \cup A^{\sim} = \bar{A}$

(**vi**) A kümesinin izole noktalarını inceleyelim.

- $b \in A$ noktasını içeren $T_1 = \{a, b\}$ komşuluğu için

$$A \cap T_1 = \{b\}$$

olduğundan $b \in izole(A)$ olur.

- $c \in A$ noktasını içeren $T_2 = \{c\}$ komşuluğu için

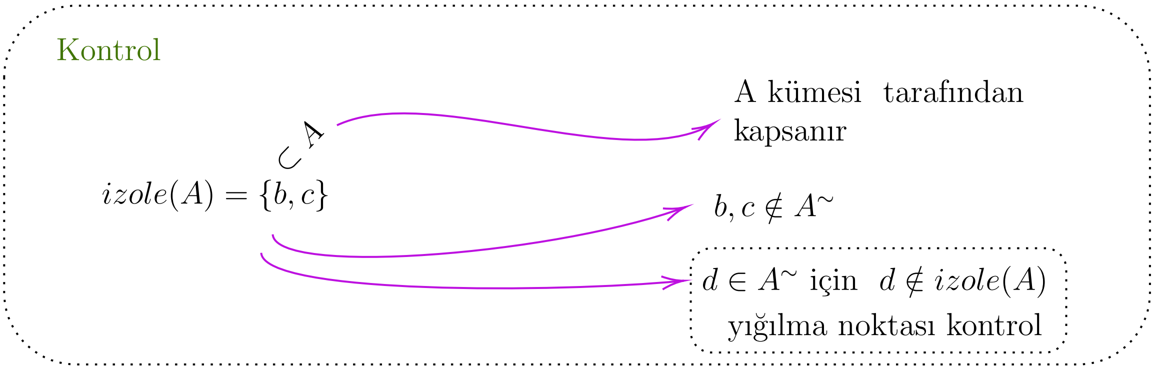
$$A \cap T_2 = \{c\}$$

olduğundan $c \in izole(A)$ olur.

Sonuç olarak A kümesinin izole noktaları kümesi

$$izole(A) = \{b, c\}$$

olur.



$\square$

Örnek 2.6.2 $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında*

$$B = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \,]2, 3]$$

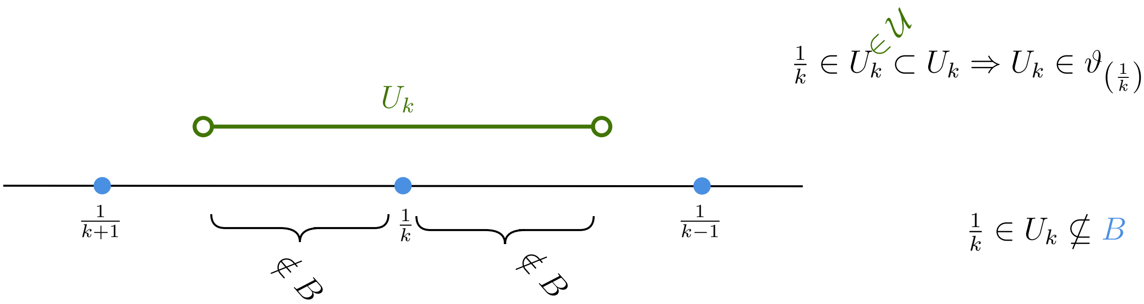
kümesinin türev kümelerini bulalım.

Çözüm: **(i)** $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayında B kümesinin içi B kümesinin kapsadığı en büyük açık küme olduğundan

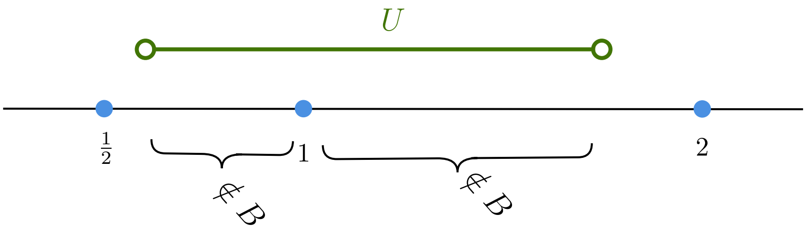
$$\overset{\circ}{B} =]2, 3[$$

olur. Şimdi bunu noktasal olarak inceleyelim. ($\overset{\circ}{B} \subset B$ olduğundan sadece B kümesine ait olan noktaları inceleyeceğiz.)

- $k \in (\mathbb{N} - \{1\})$ olmak üzere $\frac{1}{k} \in B$ olur. $\varepsilon, \delta > 0$ olmak üzere her $U_k =]\frac{1}{k} - \varepsilon, \frac{1}{k} + \delta[$ komşuluğu için $U_k \not\subseteq B$ olacağından $\frac{1}{k} \in B$ için $\frac{1}{k} \notin \overset{\circ}{B}$ olur.



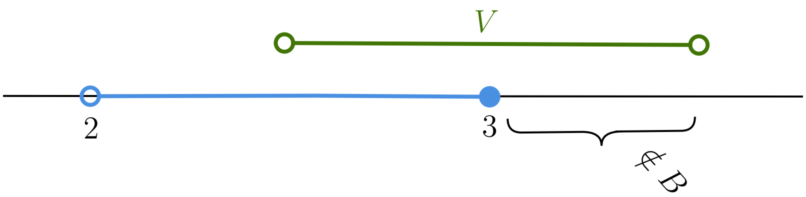
- $1 \in B$ noktası için $\varepsilon, \delta > 0$ olmak üzere her $U =]1 - \varepsilon, 1 + \delta[$ komşuluğu için $U_k \not\subseteq B$ olacağından $1 \notin \overset{\circ}{B}$ olur.



$1 \in \overset{\in \mathcal{U}}{U} \subset U \Rightarrow U \in \vartheta_{(1)}$

$1 \in U \nsubseteq B$

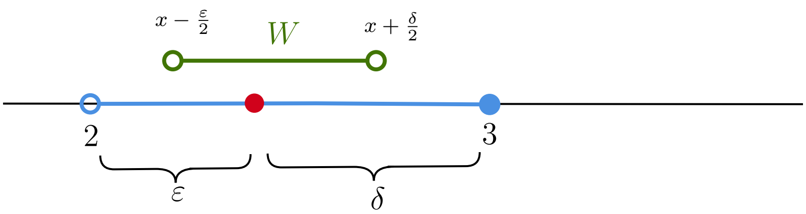
- $3 \in B$ noktası için $\varepsilon, \delta > 0$ olmak üzere her $V =]3-\varepsilon, 3+\delta[$ komşuluğu için $V \nsubseteq B$ olacağından $3 \notin \overset{\circ}{B}$ olur.



$3 \in \overset{\in \mathcal{U}}{V} \subset V \Rightarrow V \in \vartheta_{(3)}$

$3 \in V \nsubseteq B$

- $2 < x < 3$ için, $x \neq 2$ ve $x \neq 3$ olduğundan $d(2,x) = \varepsilon$ ve $d(x,3) = \delta$ olacak şekilde $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ vardır. $W = \left]x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\delta}{2}\right[\in \mathcal{U}$ açık kümesi için $W \subset B$ olduğundan $2 < x < 3$ için $x \in \overset{\circ}{B}$ olur.



$x \in \overset{\in \mathcal{U}}{W} \subset W \Rightarrow W \in \vartheta_{(x)}$

$x \in W \subset B$

Kontrol

$\overset{\circ}{B} =]2,3[$ $\in \mathcal{U}$ → Açık küme

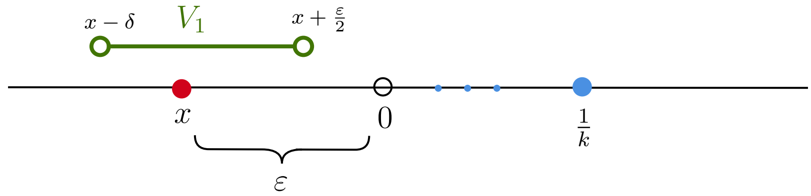
$\overset{\circ}{B} =]2,3[$ $\subset B$ → B kümesi tarafından kapsanır

(ii) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayında kapalı kümeler; tek nokta kümeleri, $[a, b]$ kapalı aralıklar, $]-\infty, c]$,$[d, +\infty[$ sonsuz kapalı aralıklar şeklinde olduğundan ve her yığılma noktası bir kapanış noktası noktası olacağından B kümesinin kapanışı

$$\bar{B} = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in N \right\} \cup [2, 3]$$

olur. Şimdi bunu noktasal olarak inceleyelim.

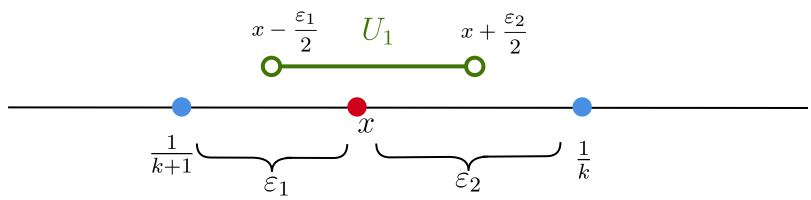
- Her $x \in B$ noktası için $x \in \bar{B}$ olur.
- $x < 0$ için $x \neq 0$ olduğundan $d(x, 0) = \varepsilon$ olacak şekilde bir ε reel sayısı vardır. $\delta > 0$ olmak üzere $V_1 = \left]x - \delta, x + \frac{\varepsilon}{2}\right[\in \mathcal{U}$ açık kümesi için $B \cap V_1 = \emptyset$ olur. Buradan $x < 0$ için $x \notin \bar{B}$ olur.



$x \in \overset{\in \mathcal{U}}{V_1} \subset V_1 \Rightarrow V_1 \in \vartheta_{(x)}$

$B \cap V_1 = \emptyset$

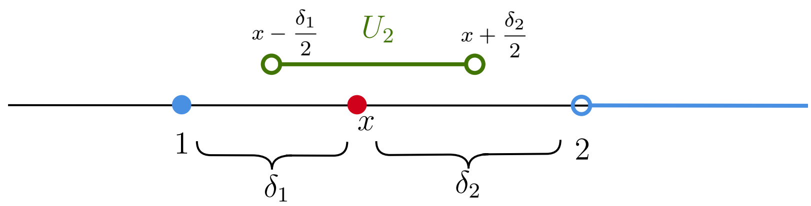
- $k \in (\mathbb{N} - \{1\})$ olmak üzere $\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k}$ olsun. $x \neq \frac{1}{k+1}$ ve $x \neq \frac{1}{k}$ olduğundan $d(\frac{1}{k+1}, x) = \varepsilon_1$ ve $d(x, \frac{1}{k}) = \varepsilon_2$ olacak şekilde bir $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ reel sayıları vardır. Buradan $U_1 = \left]x - \frac{\varepsilon_1}{2}, x + \frac{\varepsilon_2}{2}\right[\in \mathcal{U}$ açık kümesi için $B \cap U_1 = \emptyset$ olur. Buradan $k \in (\mathbb{N} - \{1\})$ olmak üzere $\frac{1}{k+1} < x < \frac{1}{k}$ için $x \notin \bar{B}$ olur.



$x \in \overset{\in \mathcal{U}}{U_1} \subset U_1 \Rightarrow U_1 \in \vartheta_{(x)}$

$B \cap U_1 = \emptyset$

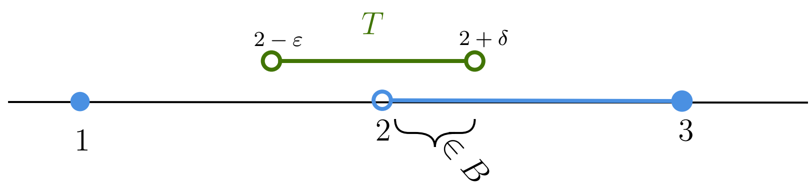
- $1 < x < 2$ için $x \neq 1$ ve $x \neq 2$ olduğundan $d(2, x) = \delta_1$ ve $d(x, 2) = \delta_2$ olacak şekilde bir δ_1, δ_2 reel sayıları vardır. Buradan $U_2 = \left]x - \frac{\delta_1}{2}, x + \frac{\delta_2}{2}\right[\in \mathcal{U}$ açık kümesi için $B \cap U_2 = \emptyset$ olur. Buradan $1 < x < 2$ için $x \notin \bar{B}$ olur.



$$x \in \overset{\in \mathcal{U}}{U_2} \subset U_2 \Rightarrow U_2 \in \vartheta_{(x)}$$

$$B \cap U_2 = \emptyset$$

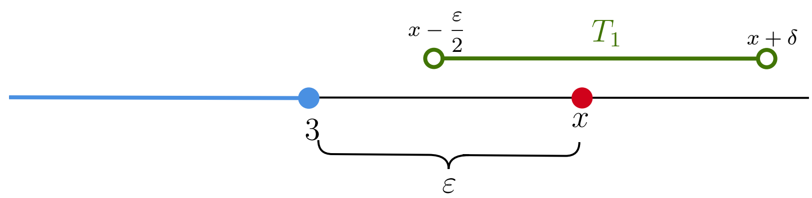
- $2 \in \mathbb{R}$ noktası için inceleyelim. $\varepsilon, \delta > 0$ olmak üzere
her $T =]2-\varepsilon, 2+\delta[\in \mathcal{U}$ komşuluğu için $B \cap T \neq \emptyset$ olduğundan $2 \in \bar{B}$ olur.



$$x \in \overset{\in \mathcal{U}}{T} \subset T \Rightarrow T \in \vartheta_{(x)}$$

$$B \cap T \neq \emptyset$$

- $x > 3$ için $x \neq 3$ olduğundan $d(3, x) = \varepsilon$ olacak şekilde bir ε reel sayısı vardır. $\delta > 0$ olmak üzere $T_1 = \left]x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \delta\right[\in \mathcal{U}$ açık kümesi için $B \cap V_1 = \emptyset$ olur. Buradan $x > 3$ için $x \notin \bar{B}$ olur.



$$x \in \overset{\in \mathcal{U}}{T_1} \subset T_1 \Rightarrow T_1 \in \vartheta_{(x)}$$

$$B \cap T_1 = \emptyset$$

- $x = 0$ için $x \in \bar{B}$ olur. (örnek2.2.14)

Kontrol

$$B \subset \bar{B} = \overset{\in \mathcal{U}^t}{\{0\}} \cup \overset{\in \mathcal{U}^t}{\left\{ \frac{1}{n} : n \in N \right\}} \cup \overset{\in \mathcal{U}^t}{[2,3]}$$

Sonlu sayıda kapalı
kümenin birleşimi
kapalı küme

B kümesini kapsar

(**iii**) B kümesinin dışı B kümesinin kapanışının tümleyeni olacağından

$$\text{dış}(B) = X - \bar{B} =]-\infty, 0[\cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[\right) \cup]1,2[\cup]3,+\infty[$$

olur.

Kontrol

$$\text{dış}(B) = X - \bar{B} = \overset{\in \mathcal{U}}{]-\infty, 0[} \cup \overset{\in \mathcal{U}}{\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[\right)} \cup \underset{\in \mathcal{U}}{]1,2[} \cup \underset{\in \mathcal{U}}{]3,+\infty[}$$

Açık kümelerin
herhangi birleşimi
açık küme olduğundan
dış$(B) \in \tau$ olur

(**iv**) B kümesinin sınırı

$$B^s = \bar{B} - \overset{\circ}{B} = \left\{ \frac{1}{n} : n \in N \right\} \cup \{0, 2, 3\}$$

olur.

Kontrol

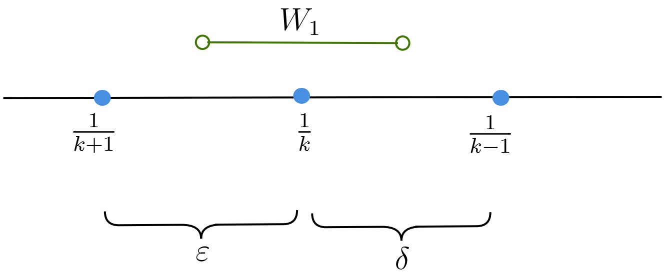
Kapalı kümelerin sonlu
birleşimi kapalı küme

$$B^s = \underset{\in \mathcal{U}^t}{\left\{ \frac{1}{n} : n \in N \right\}} \cup \underset{\in \mathcal{U}^t}{\{0, 2, 3\}}$$

(**iv**) B kümesinin izole noktalarını inceleyelim. Burada B kümesinin kapanışına ait olup izole nokta olmayan noktalar yığılma noktası olacaktır. $izole(B) \subset B$ olduğundan B kümesinin elemanlarını inceleyeceğiz.

- $k \in (\mathbb{N} - \{1\})$ olmak üzere $\frac{1}{k} \in B$ olur. $\frac{1}{k+1} \neq \frac{1}{k}$ ve $\frac{1}{k} \neq \frac{1}{k-1}$ olduğundan $d(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}) = \varepsilon$ ve $d(\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}) = \delta$ olacak şekilde $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ vardır. $W_1 = \left]\frac{1}{k} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{k} + \frac{\delta}{2}\right[\in \mathcal{U}$ açık kümesi için $W_1 \cap B = \frac{1}{k}$ olduğundan $k \in (\mathbb{N} - \{1\})$ olmak üzere $\frac{1}{k} \in B$ için $\frac{1}{k} \in izole(B)$ olur.

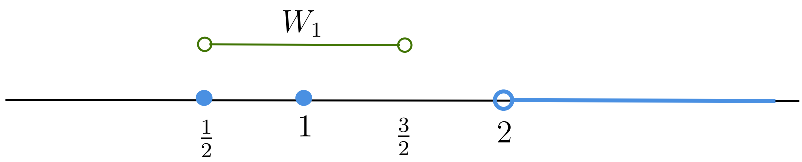
$\frac{1}{k} \in W_1 \subset W_1 \Rightarrow W_1 \in \vartheta_{(\frac{1}{k})}$



$B \cap W_1 = \{\frac{1}{k}\}$

- $1 \in B$ olsun. $W_2 =]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ açık kümesi için $B \cap W_2 = \{1\}$ olduğundan $1 \in izole(B)$ olur.

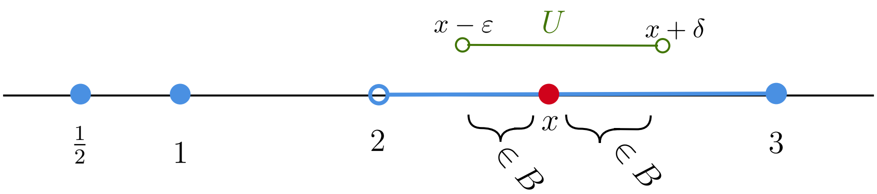
$1 \in W_2 \subset W_2 \Rightarrow W_2 \in \vartheta_{(1)}$



$B \cap W_2 = \{1\}$

- $2 < x < 3$ olsun. $\varepsilon, \delta > 0$ olmak üzere her $U =]x-\varepsilon, x+\delta[$ komşuluğu için $B \cap U \neq \{x\}$ olacağından $2 < x < 3$ için $x \notin izole(B)$ olur.

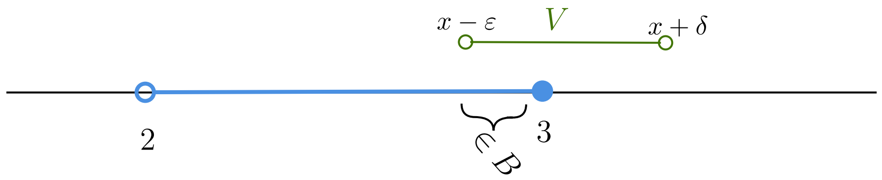
$x \in U \subset U \Rightarrow U \in \vartheta_{(x)}$



$B \cap U \neq \{x\}$

- $3 \in B$ noktası için inceleyelim. $\varepsilon, \delta > 0$ olmak üzere her $V =]3-\varepsilon, 3+\delta[$ komşuluğu için $B \cap U \neq \{3\}$ olacağından $3 \notin izole(B)$ olur.

$$x \in V \subset V \Rightarrow V \in \vartheta_{(3)}$$



$B \cap V \neq \{3\}$

Kontrol

$$izole(B) = \overset{\subset B}{\left\{ \frac{1}{n} : n \in N \right\}}$$

B kümesi tarafından kapsanır

$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \notin B^{\sim}$

(**vi**) İzole nokta olmayan kapanış noktaları yığılma noktası olduğundan B kümesinin yığılma noktaları kümesi

$$B^{\sim} = \{0\} \cup [2,3]$$

olur.

Kontrol

$$B^{\sim} = \overset{\subset \bar{B}}{\{0\} \cup [2,3]}$$

B kümesinin kapanışı tarafından kapsanır

$B \cup B^{\sim} = \bar{B}$

izole noktalar bu kümede mevcut değil

$\square$

Örnek 2.6.3 $(\mathbb{R}, \mathcal{D}^{\rightarrow})$ *uzayında*

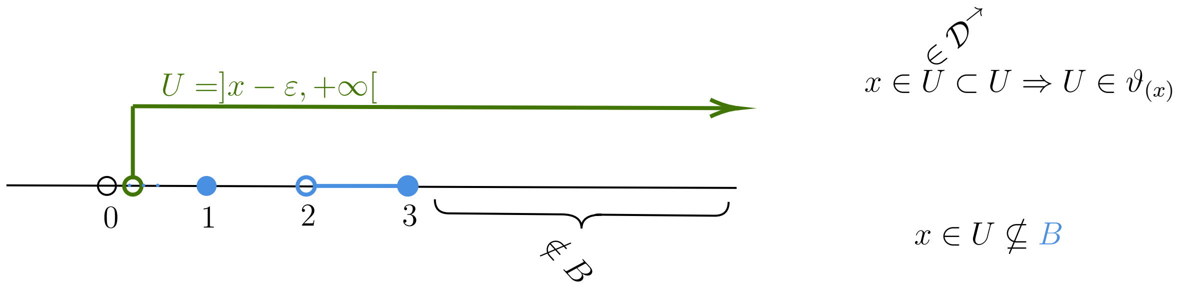
$$B = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup]2,3]$$

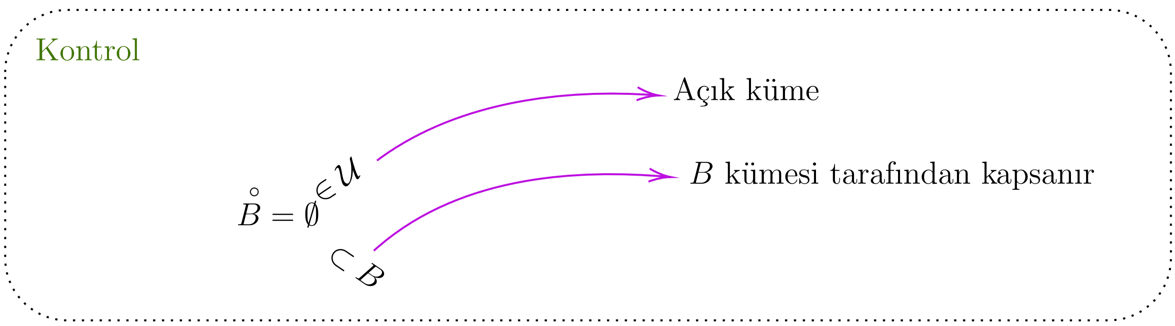
kümesinin türev kümelerini bulalım.

Çözüm: (**i**) $(\mathbb{R}, \mathcal{D}^{\rightarrow})$ uzayında açık kümeler $]\lambda, +\infty[$ şeklinde olduğundan her $\varepsilon > 0$ olmak üzere x noktasını içeren açık küme $U =]x - \varepsilon, +\infty[$ için $B \nsubseteq U$ olur. Dolayısıyla her $x \in B$ için $x \notin \overset{\circ}{B}$ olacağından

$$\overset{\circ}{B} = \emptyset$$

elde edilir.



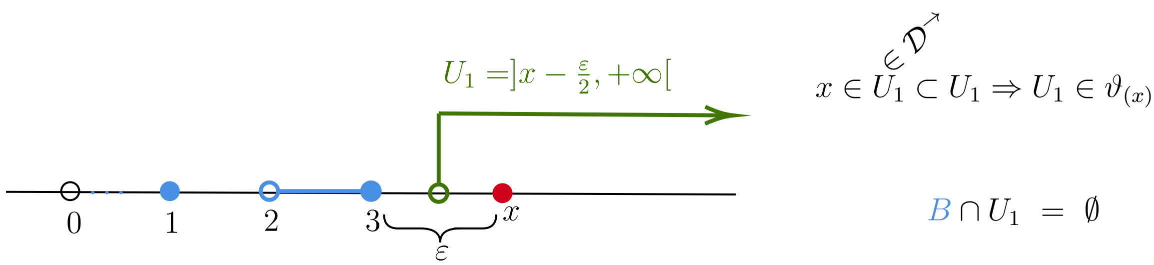


(**ii**) $(\mathbb{R}, \mathcal{D}^{\rightarrow})$ uzayında kapalı kümeler $]-\infty, \lambda]$ şeklinde olduğundan B kümesinin kapanışı B kümesini kapsayan en küçük kapalı küme

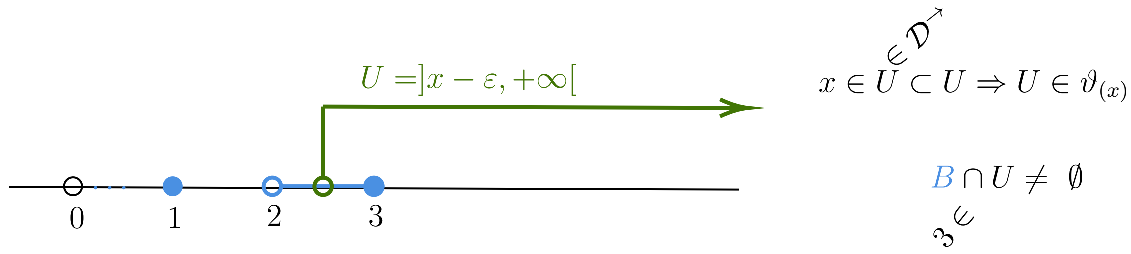
$$\bar{B} =]-\infty, 3]$$

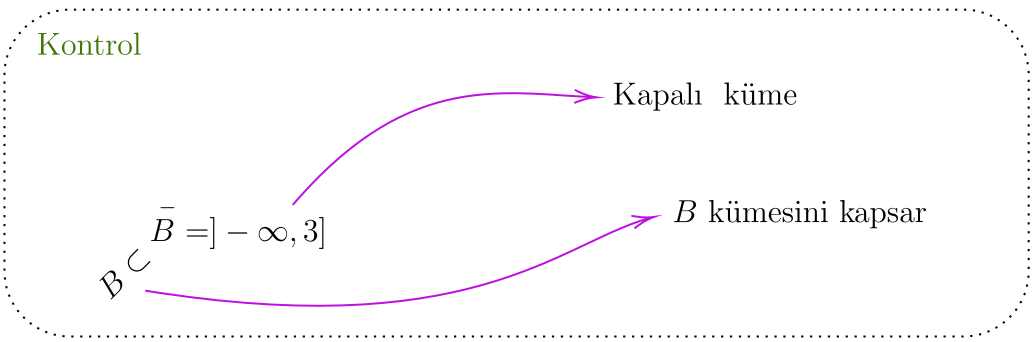
olur. Şimdi bunu noktasal olarak gösterelim.

- $x > 3$ olsun. $x \neq 3$ olduğundan $d(3, x) = \varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon \in \mathbb{R}$ reel sayısı vardır. $U_1 =]x - \frac{\varepsilon}{2}, +\infty[$ açık kümesi için $B \cap U_1 = \emptyset$ olduğundan $x > 3$ için $x \notin \bar{B}$ olur.



- $x \leqslant 3$ olsun. $\varepsilon > 0$ olmak üzere her $V =]x-\varepsilon, +\infty[$ açık kümesi için $3 \in V$ olacağından $B \cap U \neq \emptyset$ olur. Buradan $x \leqslant 3$ için $x \in \bar{B}$ olur.





(iii) $\overset{\circ}{B} = \emptyset$ olduğundan B kümesinin sınırı

$$B^s = \bar{B} - \overset{\circ}{B} = \bar{B} =]-\infty, 3]$$

olur.

Kontrol : $B^s = \bar{B} \in (\mathcal{D}^{\rightarrow})^t$ kapalı küme olur.

(iv) B kümesinin dışı B kümesinin kapanışının tümleyeni olacağından

$$\text{dış}(B) = X - \bar{B} =]3, +\infty[$$

olur.

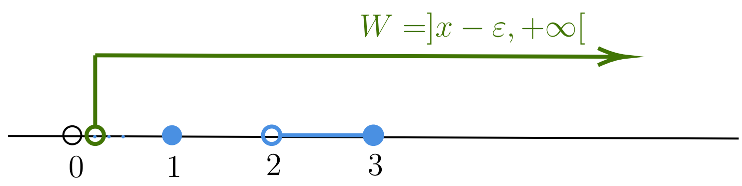
Kontrol : $\text{dış}(B) =]3, +\infty[\in \mathcal{D}^{\rightarrow}$ açık küme olur.

(v) B kümesinin izole noktalarını inceleyelim.

- $x < 3$ ve $x \in B$ olsun. $\varepsilon > 0$ olmak üzere her $W =]x-\varepsilon, +\infty$ açık kümesi için $3 \in W$ olacağından

$$B \cap W \neq \{x\}$$

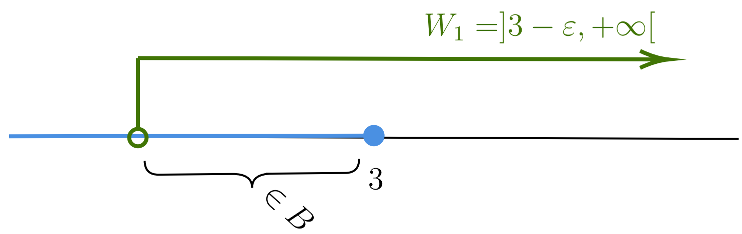
olur. $x < 3$ ve $x \in B$ için $x \notin izole(B)$ olur.



$$x \in W \subset W \Rightarrow W \in \vartheta_{(x)}$$

$$B \cap W \neq \{x\}$$

- $3 \in B$ noktasını inceleyelim. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $W_1 =]3-\varepsilon, +\infty[$ açık kümesi için $B \cap W_1 \neq \{3\}$ olacağından $3 \notin izole(B)$ olur.



$$x \in W_1 \subset W_1 \Rightarrow W_1 \in \vartheta_{(3)}$$

$$B \cap W_1 \neq \{3\}$$

Kontrol : $izole(B) = \emptyset \subset B$ olur.

(**vi**) İzole nokta olmayan kapanış noktaları yığılma noktası olduğundan B kümesinin yığılma noktaları kümesi

$$B^{\sim} =]-\infty, 3]$$

olur.

Kontrol : $B^{\sim} =]-\infty, 3] \subset \bar{B}$ ve $B \cup B^{\sim} = \bar{B} =]-\infty, 3]$ olur. □

Örnek 2.6.4 *$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde her n doğal sayısı için*

$$E_n = \{n, n+1, n+2, n+3, ...\}$$

olmak üzere

$$\tau_{\mathbb{N}} = \{\emptyset, E_n \subseteq \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\}$$

topolojisi verilsin. $C = \{2, 3, 4, 8\}$ kümesinin türev kümelerini bulalım.

Çözüm:

(**i**) $(\mathbb{N}, \tau_{\mathbb{N}})$ uzayında açık kümeler $E_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$ şeklinde olduğundan $x \in C$ noktasını içeren bir $E_x = \{x, x+1, x+2, \ldots\}$ açık kümesi için $x \in E_x \nsubseteq C$ olur . Dolayısıyla her $x \in C$ için $x \notin \overset{\circ}{C}$ olacağından

$$\overset{\circ}{C} = \emptyset$$

elde edilir.

Kontrol : $\mathring{C} = \emptyset \in \tau_{\mathbb{N}}$ açık küme ve $\mathring{C} = \emptyset \subset C = \{2, 3, 4, 8\}$ olur.

(**ii**) $(\mathbb{N}, \tau_{\mathbb{N}})$ uzayında kapalı kümeler $\{1\}, \{1, 2\}, \ldots, \{1, 2, \ldots, n\}$ şeklinde olduğundan C kümesinin kapanışı C kümesini kapsayan en küçük kapalı küme

$$\bar{C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

olur. Şimdi bunu noktasal olarak gösterelim.

- $x \leqslant 8$ olsun. $x \in E_x \in \tau_{\mathbb{N}}$ için $C \cap E_x \neq \emptyset$ olur. Buradan $x \leqslant 8$ için $x \in \bar{C}$ elde edilir.

$$\overset{\leqslant 8}{x} \in \underset{8\,\in}{E_x = \{x, x+1, \ldots,\}} \qquad\qquad \underset{8\,\in}{C \cap E_x \neq \emptyset}$$

- $x > 8$ olsun. $E_9 \in \tau_{\mathbb{N}}$ açık kümesi için $x \in E_9$ ve $C \cap E_9 = \emptyset$ olur. Buradan $x > 8$ için $x \notin \bar{C}$ elde edilir.

$$\underset{8<}{x} \in E_9 = \{9, 10, \overset{\notin \bar{C}}{\ldots},\} \qquad\qquad C \cap E_9 \neq \emptyset$$

Kontrol : $\bar{C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = E_9^t \in \tau_{\mathbb{N}}^t$ kapalı küme (Burada E_9 açık küme olduğundan tümleyeni kapalı küme olur) ve $C \subset \bar{C}$ olur.

(**iii**) $\mathring{C} = \emptyset$ olduğundan C kümesinin sınırı

$$C^s = \bar{C} - \mathring{C} = \bar{C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = E_9^t$$

olur.

Kontrol : $C^s = \bar{C} = E_9^t \in \tau_{\mathbb{N}}^t$ kapalı küme olur.

(**iv**) C kümesinin dışı C kümesinin kapanışının tümleyeni olacağından

$$\text{dış}(C) = \mathbb{N} - \bar{C} = E_9$$

olur.

Kontrol : dış$(B) = E_9 \ \in \tau_{\mathbb{N}}$ açık küme olur.

(**v**) C kümesinin izole noktalarını inceleyelim.

- $x \neq 8$ ve $x \in C$ olsun. Her E_x açık kümesi için $x \in E_x$ ve $8 \in E_x$ olacağından $C \cap E_x \neq \{x\}$ olur. Buradan $x \neq 8$ ve $x \in C$ için $x \notin izole(C)$ olur.

- $8 \in C$ noktası için inceleyelim. E_8 açık kümesi için $C \cap E_8 = \{8\}$ olduğundan $8 \in izole(C)$ olur.

Kontrol : $izole(C) = \{8\} \subset C$ olur.

(**vi**) İzole nokta olmayan kapanış noktaları yığılma noktası olduğundan C kümesinin yığılma noktaları kümesi

$$C^{\sim} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

olur.

Kontrol : $C^{\sim} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \subset \overline{C}$ ve $C \cup C^{\sim} = \overline{C} = E_9^t$ olur. □

2.7 Yoğun Kümeler

Tanım 2.7.1 *(X, τ) topolojik uzay ve $A, B \subset X$ alt kümeleri için yoğun küme tanımları*

$$\begin{array}{lcl}
\overset{\circ}{\overline{A}} \neq \emptyset & \Leftrightarrow & A \text{ kümesi } (X,\tau) \textbf{ uzayı içinde yoğun} \\
B \subset \overline{A} & \Leftrightarrow & A \text{ kümesi } B \textbf{ kümesi içinde yoğun} \\
\overline{A} = X & \Leftrightarrow & (X,\tau) \text{ uzayı içinde } \textbf{her yerde yoğun} \\
A \subset A^{\sim} & \Leftrightarrow & A \text{ kümesi } \textbf{kendi içinde yoğun} \\
\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset & \Leftrightarrow & A \text{ kümesi } \textbf{hiçbir yerde yoğun değil}
\end{array}$$

şeklinde verilir.

Örnek 2.7.2 *$(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayında*

- *$A_1 =]2, 3[\cup \{4, 5, 6\}$ kümesi için*

$$\overset{\circ}{\overline{A}} = ([2, 3] \cup \{4, 5, 6\})^{\circ} =]2, 3[\neq \emptyset$$

olduğundan A_1 kümesi $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayında yoğundur.

- *$A_2 =]0, 1[$ ve $B = [0, 1[$ olmak üzere*

$$B = [0, 1[\subset [0, 1] = \overline{A_2}$$

olduğundan A_2 kümesi B kümesi içinde yoğundur.

- *$\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ve $\mathbb{Q}^t$ irrasyonel sayılar kümesi için*

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}^t}$$

olduğundan rasyonel sayılar ve irrasyonel sayılar kümeleri $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayında her yerde yoğundur.

- $A_3 =]2,3[$ *kümesi için*

$$A_3 =]2,3[\subset [2,3] = A_3^{\sim}$$

olduğundan A_3 *kümesi kendi içinde yoğundur.*

- $\mathbb{Z}$ *tam sayılar kümesi ve* $\mathbb{N}$ *doğal sayılar kümesi için*

$$\overset{\circ}{\overline{\mathbb{Z}}} = \overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \emptyset = \overset{\circ}{\mathbb{N}} = \overset{\circ}{\overline{\mathbb{N}}}$$

olduğundan tam sayılar ve doğal sayılar kümeleri $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *uzayında hiçbir yerde yoğun değildir.*

Örnek 2.7.3 $(\mathbb{R}, \mathcal{D}^{\rightarrow})$ *uzayında*

- $B_1 =]2, +\infty[$ *kümesi için*

$$\overset{\circ}{\overline{B_1}} = \overset{\circ}{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \neq \emptyset$$

olduğundan B_1 *kümesi* $(\mathbb{R}, \mathcal{D}^{\rightarrow})$ *uzayında yoğundur.*

- $B_2 =]2,5[$ *ve* $C = [0,5[$ *olmak üzere*

$$C = [0,5[\subset]-\infty, 5] = \overline{B_2}$$

olduğundan B_2 *kümesi* C *kümesi içinde yoğundur.*

- $B_1 =]2, +\infty[$ *kümesi için*

$$\overline{B_1} = \mathbb{R}$$

olduğundan B_1 *kümesi* $(\mathbb{R}, \mathcal{D}^{\rightarrow})$ *uzayında her yerde yoğundur.*

- $B_2 =]2,5[$ *kümesi için*

$$B_2 =]2,5[\subset]-\infty, 5] = B_2^{\sim}$$

olduğundan B_2 *kümesi kendi içinde yoğundur.*

- $B_2 =]2,5[$ *kümesi için*

$$\overset{\circ}{\overline{B_2}} = (]-\infty, 5])^{\circ} = \emptyset$$

olduğundan B_2 *kümesi* $(\mathbb{R}, \mathcal{D}^{\rightarrow})$ *uzayında hiçbir yerde yoğun değildir.*

Örnek 2.7.4 $(\mathbb{R}, {}^{\leftarrow}\mathcal{D})$ *uzayında*

- $C_1 =]-\infty, 2[$ *kümesi için*

$$\overset{\circ}{\overline{C_1}} = \overset{\circ}{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \neq \emptyset$$

olduğundan C_1 *kümesi* $(\mathbb{R}, {}^{\leftarrow}\mathcal{D})$ *uzayında yoğundur.*

- $C_2 = \{3,4,5\}$ *ve* $D = [3,8[$ *olmak üzere*

$$D = [3,8[\subset [3,+\infty[= \bar{C_2}$$

olduğundan C_2 *kümesi* D *kümesi içinde yoğundur.*

- $C_1 =]-\infty, 2[$ *kümesi için*

$$\bar{C_1} = \mathbb{R}$$

olduğundan C_1 *kümesi* $(\mathbb{R}, ^{\leftarrow}\mathcal{D})$ *uzayında her yerde yoğundur.*

- $C_2 = \{3,4,5\}$ *kümesi için*

$$C_2 = \{3,4,5\} \subset [3,+\infty[= C_2^{\sim}$$

olduğundan C_2 *kümesi kendi içinde yoğundur.*

- $C_2 = \{3,4,5\}$ *kümesi için*

$$\overset{\circ}{\bar{C_2}} = ([3,+\infty[)^{\circ} = \emptyset$$

olduğundan C_2 *kümesi* $(\mathbb{R}, ^{\leftarrow}\mathcal{D})$ *uzayında hiçbir yerde yoğun değildir.*

Örnek 2.7.5 *İçi boş olan bir küme her yerde yoğun olabilir.*

Çözüm: $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayında, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ve $\mathbb{Q}^t$ irrasyonel sayılar kümesi için

$$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} = \bar{\mathbb{Q}^t}$$

olur. Ayrıca rasyonel sayılar ve irrasyonel sayılar kümeleri $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayında her yerde yoğundur. □

Örnek 2.7.6 *Hiçbir yerde yoğun olmayan kümelerin sayılabilir birleşimi her yerde yoğun olabilir.*

Çözüm: $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayında $k \in \mathbb{Q}$ için

$$\overset{\circ}{\overline{\{k\}}} = \emptyset$$

olduğundan $\{k\}$ tek nokta kümeleri $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ uzayında hiçbir yerde yoğun değildir. Ancak

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Q}} \{k\} = \mathbb{Q}, \quad \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

ve $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi sayılabilir bir küme olduğundan hiçbir yerde yoğun olmayan kümelerin sayılabilir birleşimi her yerde yoğun olabilir. □

Örnek 2.7.7 *$X = \{a, b, c, d, e,\}$ kümesi üzerinde*

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

topolojisi verilsin. Bu uzaydaki kapalı kümelerin ailesi

$$\tau^t = \{X, \emptyset, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}, \{a\}\}$$

olur.

- *$D_1 = \{a\}$ kümesi için*

  $$\overset{\circ}{\overline{D}}_1 = \overset{\circ}{\{a\}} = \{a\} \neq \emptyset$$

  olduğundan D_1 kümesi (X, τ) uzayında yoğundur.

- *$D_2 = \{c, d\}$ ve $E = \{b, c, d, e\}$ olmak üzere*

  $$E = \{b, c, d, e\} \subset \{b, c, d, e\} = \overline{D}_2$$

  olduğundan D_2 kümesi E kümesi içinde yoğundur.

- *$D_3 = \{a, c\}$ kümesi için*

  $$\overline{D}_3 = X$$

  olduğundan D_3 kümesi (X, τ) uzayında her yerde yoğundur.

- *$D_4 = \{c, d\}$ kümesi için*

  $$D_4 = \{c, d\} \subset \{b, c, d, e\} = D_4^{\sim}$$

  olduğundan D_4 kümesi kendi içinde yoğundur.

- *$D_5 = \{b, e\}$ kümesi için*

  $$\overset{\circ}{\overline{D}}_5 = \{b, e\}^{\circ} = \emptyset$$

  olduğundan D_5 kümesi (X, τ) uzayında hiçbir yerde yoğun değildir.

Örnek 2.7.8 *(X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ alt küme olmak üzere A kümesinin (X, τ) uzayında her yerde yoğun olması için gerek ve yeter şart her boş kümeden farklı her $T \subset X$ açık kümesi için $A \cap T \neq \emptyset$ olmasıdır.*

$$\overline{A} = X \iff \forall T \subset X (T \neq \emptyset, T \in \tau),\ A \cap T \neq \emptyset$$

Çözüm: $\Rightarrow$ $\bar{A} = X$ olsun. $T \subset X (T \neq \emptyset, T \in \tau)$ alt kümesi için

$$\begin{aligned} T \in \tau \quad &\Rightarrow \quad x \in T \subset X \\ &\Rightarrow \quad x \in \bar{A} \qquad\qquad ... \left(\bar{A} = X\right) \\ &\Rightarrow \quad A \cap T \neq \emptyset \end{aligned}$$

elde edilir.

$\Leftarrow$ Tersine her $T \subset X (T \neq \emptyset, T \in \tau),\ A \cap T \neq \emptyset$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} x \in X, \forall T \in \tau, A \cap T \neq \emptyset \quad &\Rightarrow \quad x \in \bar{A} \\ &\Rightarrow \quad X \subset \bar{A} \\ &\Rightarrow \quad X = \bar{A} \qquad\qquad ... \left(\bar{A} \subset X\right) \\ &\Rightarrow \quad A \text{ kümesi } (X, \tau) \text{ uzayında her yerde yoğun} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Örnek 2.7.9 *(X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ alt küme olmak üzere A kümesinin (X, τ) uzayında her yerde yoğun ise her boş kümeden farklı her $U \subset X$ açık kümesi için*

$$\bar{U} = (A \cap U)^{-}$$

olur.

$$\bar{A} = X \Rightarrow \forall U \subset X (U \neq \emptyset, U \in \tau),\ \bar{U} = (A \cap U)^{-}$$

Çözüm: $A \cap U \subset U$ ve bir kümenin kapanışını alma işlemi sıra koruyan bir işlem olduğundan

$$(A \cap U)^{-} \subset \bar{U} \qquad (1)$$

olur. Diğer taraftan $x \in \bar{U}$ için

$$\begin{aligned} x \in \bar{U} \quad &\Rightarrow \quad \forall V \in \vartheta_{(x)}\ U \cap V \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \quad \bar{A} \cap (U \cap V) \neq \emptyset \qquad ... \left(\bar{A} = X\right) \\ &\Rightarrow \quad \left(\bar{A} \cap U\right) \cap V \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \quad x \in \left(\bar{A} \cap U\right)^{-} \\ &\Rightarrow \quad \bar{U} \subset \left(\bar{A} \cap U\right)^{-} \qquad\qquad (2) \end{aligned}$$

olur. (1) ve (2) ifadelerinden

$$\overline{U} = (A \cap U)^-$$

elde edilir. $\square$

Örnek 2.7.10 *(X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(**i**) *A kümesi hiçbir yerde yoğun değildir.*

(**ii**) *$\overline{A}$ hiçbir yerde yoğun değildir.*

(**iii**) *$(X - A)^\circ$ kümesi (X, τ) uzayında her yerde yoğundur.*

Çözüm: (**i**) $\Rightarrow$ (**ii**) A kümesi hiçbir yerde yoğun değil ise

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset \quad &\Rightarrow \quad \overset{\circ}{\overline{\overline{A}}} = \emptyset && \ldots \left(\overline{\overline{A}} = \overline{A} \right) \\
&\Rightarrow \quad \overset{\circ}{\overline{\square}} = \emptyset && \ldots \left(\square = \overline{A} \right) \\
&\Rightarrow \quad \square \text{ kümesi hiçbir yerde yoğun değil} \\
&\Rightarrow \quad \overline{A} \text{ kümesi hiçbir yerde yoğun değil}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(**ii**) $\Rightarrow$ (**i**) $\overline{A}$ hiçbir yerde yoğun değil ise

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\overline{\overline{A}}} = \emptyset \quad &\Rightarrow \quad \overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset && \ldots \left(\overline{\overline{A}} = \overline{A} \right) \\
&\Rightarrow \quad \overline{A} \text{ kümesi hiçbir yerde yoğun değil}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(**i**) $\Leftrightarrow$ (**iii**) A kümesi hiçbir yerde yoğun değil ise

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset \quad &\Rightarrow \quad X - \overset{\circ}{\overline{A}} = X - \emptyset \\
&\Leftrightarrow \quad \left(X - \overline{A} \right)^- = X && \ldots \left(X - \overset{\circ}{\overline{A}} = \left(X - \overline{A} \right)^- \right) \\
&\Leftrightarrow \quad (X - A)^{\circ -} = X && \ldots \left(X - \overline{A} = (X - A)^\circ \right) \\
&\Leftrightarrow \quad \overline{\square} = X && \ldots (\square = (X - A)^\circ) \\
&\Leftrightarrow \quad \square \text{ kümesi } (X, \tau) \text{ uzayında her yerde yoğun} \\
&\Leftrightarrow \quad (X - A)^\circ \text{ kümesi } (X, \tau) \text{ uzayında her yerde yoğun}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Örnek 2.7.11 *(X,τ) topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olmak üzere A ve B kümeleri (X,τ) uzayıdan her yerde yoğun ise*

(**i**) *$A \cup B$ kümesi (X,τ) uzayında her yerde yoğundur.*

(**ii**) *$A \cap B$ kümesi (X,τ) uzayında her yerde yoğun olmayabilir.*

Çözüm: (**i**) A ve B kümeleri (X,τ) uzayında her yerde yoğun ise

$$\overline{A} = X \;\wedge\; \overline{B} = X$$

ve

$$(A \cup B)^{-} = \overline{A} \cup \overline{B} = X \cup X = X$$

olacağından $A \cup B$ kümesi (X,τ) uzayında her yerde yoğun olur.

(**ii**) $(X,\tau) = (\mathbb{R},\mathcal{U})$ ve $A = \mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ve $B = \mathbb{Q}^t$ irrasyonel sayılar kümesi olsun.

$$\overline{A} = \mathbb{R} = \overline{B}$$

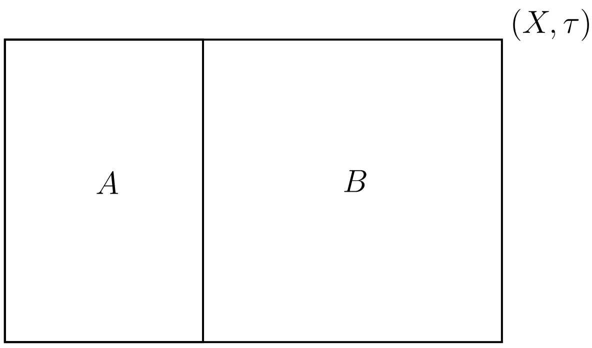
olduğundan A ve B kümeleri $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ uzayında her yerde yoğun olur.

$$A \cap B = \emptyset$$

ve $(A \cap B)^{-}\overline{\emptyset} = \emptyset \neq \mathbb{R}$ olduğundan $A \cap B$ kümesi $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ uzayında her yerde yoğun değildir. □

Örnek 2.7.12 *Bir (X,τ) topolojik uzay ve $A, B \subset X$ olmak üzere $A \cup B = X$ ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. A ve B kümelerinin hiçbir noktaları iç nokta değilse A ve B kümeleri (X,τ) uzayıdan her yerde yoğundur.*

Çözüm:



$$A = X - B \quad \text{ve } B = X - A$$

$$\mathring{A} = \emptyset = \mathring{B}$$

$A, B \subset X$ olmak üzere $A \cup B = X$ ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. A ve B kümelerinin hiçbir noktaları iç nokta değilse

$$\mathring{A} = \emptyset = \mathring{B}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= (X-B)^{-} && \dots (A = X - B) \\
&= X - \overset{\circ}{B} && \dots \left((X-B)^{-} = X - \overset{\circ}{B} \right) \\
&= X - \emptyset && \dots \left(\overset{\circ}{B} = \emptyset \right) \\
&= X \\
&\Rightarrow A \text{ kümesi } (X,\tau) \text{ uzayında her yerde yoğun}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\bar{B} = X$ olacağından A ve B kümeleri (X,τ) uzayıdan her yerde yoğun olurlar. □

Bölüm 3

SÜREKLİLİK

Sürekli fonksiyon kavramı, genellikle kalkülüs veya analiz kitaplarında ilk olarak karşımıza çıkar. Bir fonksiyonun reel eksen üzerindeki sürekliliği $\varepsilon - \delta$ tanımı kullanılarak ilk kez Bolzano tarafından 1817 yılında verilmiştir. Metrik yapısını kullanmadan genelleştirerek, topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonları tanımlamak mümkündür.

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & f(x) = y \end{array}$$

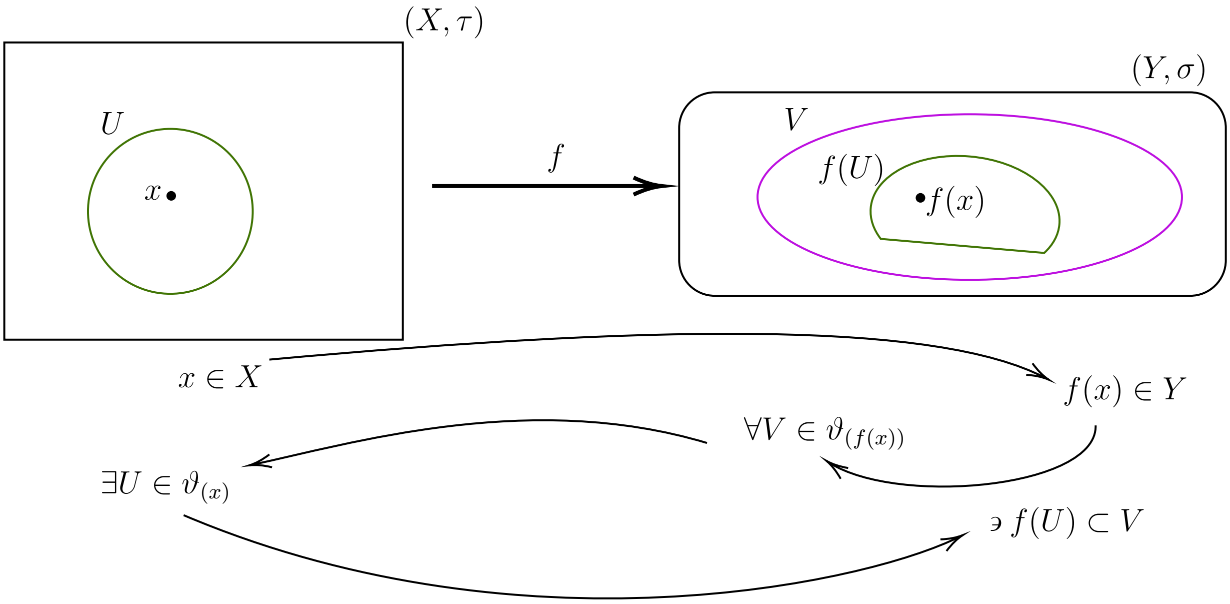
fonksiyonunun sürekliliği fonksiyonun $f(x) = y$ tanımından bağımsız olarak (sabit fonksiyon hariç) X ve Y kümeleri üzerindeki topolojilere bağlıdır.

"Gutta cavat lapidem non vi sed saepe cadendo."
(Taşı delen suyun gücü değil damlaların sürekliliğidir.)

Publius Ovidius Naso

3.1 Bir Noktada Süreklilik

Tanım 3.1.1 *(X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzayları, $f : X \to Y$ fonksiyonu ve bir $x \in X$ noktası verilsin. Eğer $f(x)$ noktasının her $V \subset Y$ komşuluğu için, $f(U) \subset V$ olacak şekilde x noktasının bir $U \subset X$ komşuluğu varsa, f fonksiyonuna x noktasında* ***süreklidir*** *denir.*



$$f, x \in X \text{ noktasında süreklidir} \iff \forall V \in \vartheta_{(f(x))} \text{ için, } \exists U \in \vartheta_{(x)} \ni f(U) \subset V$$

$$\begin{aligned} f \text{ fonksiyonu}, x \in X \text{ noktasında sürekli değil} &\iff \exists V \in \vartheta_{(f(x))} \forall U \in \vartheta_{(x)} \text{ için } f(U) \nsubseteq V \\ &\iff \exists V \in \vartheta_{(f(x))} \ni f^{-1}(V) \notin \vartheta_{(x)} \end{aligned}$$

Not. İşlemlerde kolaylık olması açısından ispatlarda ve çözümlerde bu notdan itibaren "Bir f fonksiyonu $x \in X$ noktasında süreklidir" ifadesini "$f, x \in X, (c)$" notasyonu ile "Bir f fonksiyonu $x \in X$ noktasında sürekli değildir" ifadesini "$f, x \in X, \sim (c)$" notasyonu ile göstereceğiz. □

Teorem 3.1.2 *Bir $f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde, aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:*

(i) *f fonksiyonu $x \in X$ noktasında süreklidir.*

(ii) *$\forall V \in \vartheta_{(f(x))}$ için, $\exists U \in \vartheta_{(x)} \ni x \in U \implies f(x) \in V$ dir.*

(iii) *$\forall V \in \vartheta_{(f(x))}$ için, $\exists U \in \vartheta_{(x)} \ni U \subset f^{-1}(V)$ dir.*

(iv) *$\forall V \in \vartheta_{(f(x))}$ için, $f^{-1}(V) \in \vartheta_{(x)}$ dir.*

(v) $\mathcal{G}_{(f(x))}$ *ailesi,* $f(x)$ *noktasının komşuluklar tabanı olmak üzere*

$$\forall W \in \mathcal{G}_{(f(x))} \text{\textit{için}},\ f^{-1}(W) \in \vartheta_{(x)}$$

İspat.

(i) $\Rightarrow$ **(ii)**$f, x \in X, (c)$ ise

$$\forall V \in \vartheta_{(f(x))} \text{ için}, \exists U \in \vartheta_{(x)} \ni f(U) \subset V$$

olur. Buradan $x \in U$ için

$$\begin{aligned} x \in U &\Rightarrow f(x) \in f(U) \\ &\Rightarrow f(x) \in V \qquad ...(f(U) \subset V) \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ **(iii)** Her $V \in \vartheta_{(f(x))}$ için,

$$\exists U \in \vartheta_{(x)} \ni x \in U \Rightarrow f(x) \in V$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned} (x \in U \Rightarrow f(x) \in V) &\Rightarrow f(U) \subset V \\ &\Rightarrow U \subset f^{-1}(V) \end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ **(iv)** Her $V \in \vartheta_{(f(x))}$ için,

$$\exists U \in \vartheta_{(x)} \ni U \subset f^{-1}(V)$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned} U \in \vartheta_{(x)} &\Rightarrow x \in T \subset U \quad \ni T \in \tau \\ &\Rightarrow x \in T \subset f^{-1}(V) \qquad ...(U \subset f^{-1}(V)) \\ &\Rightarrow f^{-1}(V) \in \vartheta_{(x)} \end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) $\Rightarrow$ **(v)** $W \in \mathcal{G}_{(f(x))}$ kümesi verilsin. $\mathcal{G}_{(f(x))} \subset \vartheta_{(f(x))}$ olduğundan, $W \in \vartheta_{(f(x))}$ olur. (iv) ifadesinden $f^{-1}(W) \subset \vartheta_{(x)}$ olur.

(v) $\Rightarrow$ **(i)** $V \in \vartheta_{(f(x))}$ komşuluğu verilsin. Buradan

$$\begin{aligned} V \in \vartheta_{(f(x))} &\Rightarrow \exists W \in \mathcal{G}_{(f(x))} \ni f(x) \in W \subset V \quad ...\left(\mathcal{G}_{(f(x))} \subset \vartheta_{(f(x))}\right) \\ &\Rightarrow f^{-1}(W) \in \vartheta_{(x)} \qquad ...((v) \text{ ifadesinden}) \end{aligned}$$

olur. Bir $\square$ küme için $f(f^{-1}\square) \subset \square$ olduğundan

$$f(U) = f(f^{-1}(W)) \subset W \subset V$$

olur. $U = f^{-1}(W)$ alınırsa

$$\forall V \in \vartheta_{(f(x))} \text{ için, } \exists U \in \vartheta_{(x)} \ni f(U) \subset V$$

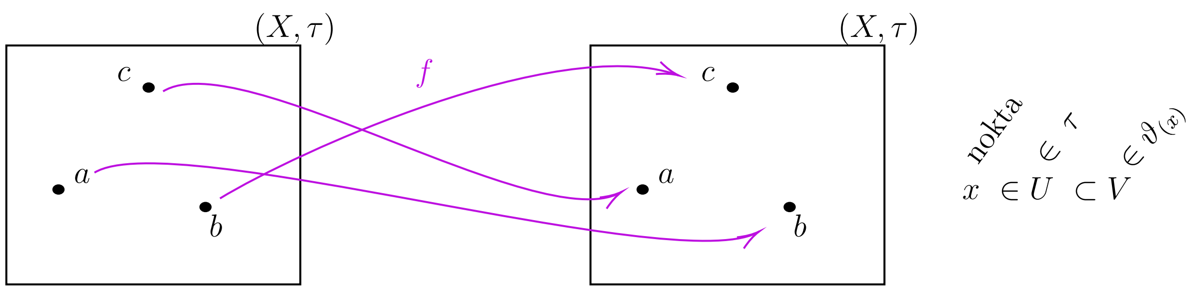
olacağından f fonksiyonu, $x \in X$ noktasında süreklidir. $\square$

Örnek 3.1.3 *$X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde*

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$$

topolojisi verilsin. $f : X \to X$ fonksiyonu, $f(a) = b, f(b) = c$ ve $f(c) = a$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu, (X, τ) uzayının hangi noktalarında sürekli olduğunu araştıralım.

Çözüm: Noktaların komşuluklarını yazalım.



$\vartheta_{(a)} = \{X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$
$\vartheta_{(b)} = \{X, \{a, b\}\}$
$\vartheta_{(c)} = \{X\}$

$\vartheta_{(f(a))} = \vartheta_{(b)} = \{X, \{a, b\}\}$
$\vartheta_{(f(b))} = \vartheta_{(c)} = \{X\}$
$\vartheta_{(f(c))} = \vartheta_{(a)} = \{X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$

$f(U) \subset V$ olması $U \subset f^{-1}(V)$ olmasını gerektirdiğinden verilen noktanın görüntüsüne ait komşulukların öngörüntülerini inceleyelim.

- $a \in X$ noktası için inceleyelim. $f(a) = b$ noktasının bütün komşulukları X ve $\{a, b\}$ için

$$f^{-1}(X) = X \in \vartheta_{(a)}$$
$$f^{-1}(\{a, b\}) = \{a, c\} \in \vartheta_{(a)}$$

  olduğundan, f fonksiyonu $a \in X$ noktasında süreklidir.

- $b \in X$ noktası için inceleyelim. $f(b) = c$ noktasının bütün komşulukları X için

$$f^{-1}(X) = X \in \vartheta_{(b)}$$

  olduğundan, f fonksiyonu $b \in X$ noktasında süreklidir.

- $c \in X$ noktası için inceleyelim. $f(c) = a$ noktasının $\{a\}$ komşuluğu için

$$f^{-1}(\{a\}) = \{c\} \notin \vartheta_{(c)}$$

olduğundan f fonksiyonu, $c \in X$ noktasında sürekli değildir.

$\square$

Uyarı 3.1.4 *Süreklilik kavramı, lokal bir özelliktir. Bir noktada sürekli olan bir fonksiyon, diğer bir noktada sürekli olmayabilir.*

Teorem 3.1.5 *$f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer f fonksiyonu, $x \in X$ noktasında sürekli ve $x \in \bar{A}$ ise $f(x) \in \overline{f(A)}$ olur.*

$$f, x \in X, (c) \ \wedge \ x \in \bar{A} \Rightarrow f(x) \in \overline{f(A)}$$

İspat. Bir $x \in \overline{A}$ noktası ve $f(x)$ noktasının herhangi bir $V \subset Y$ komşuluğu verilsin. Buradan

$$\begin{aligned}
V \in \vartheta_{(f(x))} \quad &\Rightarrow \quad f^{-1}(V) \in \vartheta_{(x)} && \ldots (f, (c)) \\
&\Rightarrow \quad A \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing && \ldots (x \in \overline{A}) \\
&\Rightarrow \quad \underbrace{f\left(A \cap f^{-1}(V)\right)}_{\square_1} \neq f(\varnothing) = \varnothing && \\
&\Rightarrow \quad \underbrace{f(A) \cap f\left(f^{-1}(V)\right)}_{\square_2} \neq \varnothing && \ldots (\square_1 \subset \square_2) \\
&\Rightarrow \quad f(A) \cap V \neq \varnothing && \ldots (f(f^{-1}(V)) \subset V) \\
&\Rightarrow \quad f(x) \in \overline{f(A)}
\end{aligned}$$

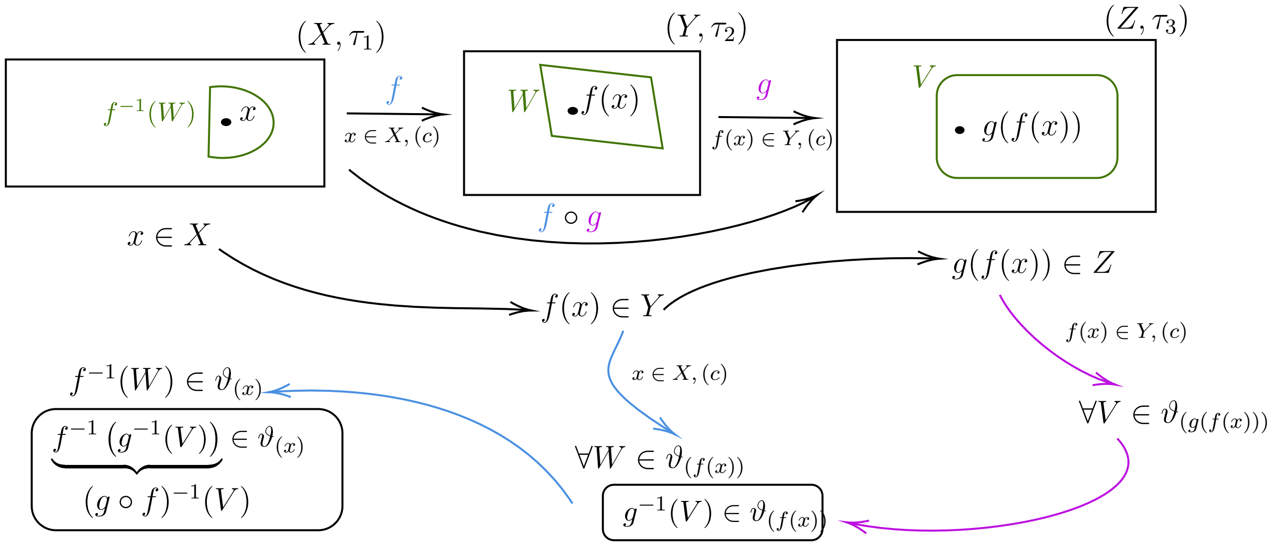
elde edilir. $\square$

Teorem 3.1.6 *$f(X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ ve $g : (Y, \tau_2) \to (Z, \tau_3)$ fonksiyonları verilsin. Eğer f fonksiyonu, $x \in X$ noktasında sürekli ve g fonksiyonu da $f(x)$ noktasında sürekli ise, $g \circ f : X \to Z$ fonksiyonu, $x \in X$ noktasında süreklidir.*

İspat. $x \in X$ noktasını ele alalım. Buradan, $f(x) \in Y$ ve $g(f(x)) \in Z$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}
g, f(x) \in Y, (c) \quad &\Rightarrow \quad \forall V \in \vartheta_{(g(f(x)))} \text{ için } g^{-1}(V) \in \vartheta_{(f(x))} \\
f, x \in X, (c) \quad &\Rightarrow \quad \forall W \in \vartheta_{(f(x))} \text{ için } f^{-1}(W) \in \vartheta_{(x)} \\
&\Rightarrow \quad g^{-1}(V) \in \vartheta_{(f(x))} \text{ için } f^{-1}\ (g^{-1}(V)) \in \vartheta_{(x)} \quad \ldots (W = g^{-1}(V)) \\
&\Rightarrow \quad (g \circ f)^{-1}(V) \in \vartheta_{(x)} \\
&\Rightarrow \quad g \circ f, x \in X, (c)
\end{aligned}$$

elde edilir.



$\square$

3.2 Her Noktada Süreklilik

Tanım 3.2.1 *$f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\sigma)$ bir fonksiyonu her $x \in X$ noktasında sürekli ise, f fonksiyonuna X kümesi üzerinde süreklidir denir.*

Uyarı 3.2.2 *Eğer f fonksiyonunun tanım ya da değer kümesi üzerinde birden çok topolojik yapıyı aynı zamanda düşünüyorsak, f fonksiyonunun hangi topolojiye göre sürekli olduğunu belirtmek gerekir. Bunun için "$f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ süreklidir" ya da "f fonksiyonu $\tau - \sigma$ süreklidir" şeklinde ifade edilir.*

Not. *İşlemlerde kolaylık olması açısından ispatlarda ve çözümlerde bu notdan itibaren "Bir f fonksiyonu X uzayının her noktasında süreklidir" ifadesini "$f,(c)$" notasyonu ile "Bir f fonksiyonu X uzayının her noktasında sürekli değildir" ifadesini "$f, \sim (c)$" notasyonu ile göstereceğiz.* $\square$

Teorem 3.2.3 *$f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\sigma)$ fonksiyonu için, aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:*

(i) *f fonksiyonu süreklidir.*

(ii) *$\forall A \subset X, f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ olur.*

(iii) *$\forall F \subset Y$ kapalı alt kümesi için $f^{-1}(F) \subset X$ alt kümesi (X,τ) uzayında kapalı küme olur.*

$$F \in \sigma^t \Rightarrow f^{-1}(F) \in \tau^t$$

(iv) *$\forall A \subset Y$ açık alt kümesi için $f^{-1}(A) \subset X$ alt kümesi (X,τ) uzayında açık küme olur.*

$$A \in \sigma \Rightarrow f^{-1}(A) \in \tau$$

İspat. (**i**) $\Rightarrow$ (**ii**) $f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\sigma)$ fonksiyonu ve bir $A \subset X$ verilsin. $x \in A$ için $f(x) \in f(A)$ olur. f sürekli olduğundan,

$$x \in \bar{A} \Rightarrow f(x) \in \overline{f(A)}$$

olur. Buradan $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ elde edilir.

(**ii**) $\Rightarrow$ (**iii**) $F \subset Y$ kapalı bir küme olsun. Her küme kapanışı tarafından kapsandığından $\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(F)$ olduğunu gösterelim. (ii) ifadesinden, her $f^{-1}(F) \subset X$ alt kümesi için,

$$\begin{aligned} f^{-1}(F) \subset X &\Rightarrow f(\overline{f^{-1}(F)}) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} \\ &\Rightarrow \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} \qquad \ldots \begin{pmatrix} f(f^{-1}(F)) \subset F \\ A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B} \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \overline{f(f^{-1}(F))} \subset F \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} f(\overline{f^{-1}(F)}) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} &\Rightarrow f^{-1}\left(f(\overline{f^{-1}(F)})\right) \subset f^{-1}\left(\overline{f(f^{-1}(F))}\right) \\ &\Rightarrow f^{-1}\left(f(\overline{f^{-1}(F)})\right) \subset f^{-1}(F) \qquad \ldots \begin{pmatrix} \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \bar{F} \\ F \in \tau^t \Rightarrow \bar{F} = F \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \overline{(f^{-1}(F))} \subset f^{-1}(F) \qquad \ldots \left(\overline{(f^{-1}(F))} \subset f^{-1}f\left(\overline{(f^{-1}(F))}\right)\right) \\ &\Rightarrow \overline{(f^{-1}(F))} = f^{-1}(F) \qquad \ldots \left(f^{-1}(F) \subset \overline{(f^{-1}(F))}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Kapanışı kendisine eşit olduğu için $f^{-1}(F)$ kümesi (X,τ) uzayında kapalı küme olur.

(**iii**) $\Rightarrow$ (**iv**) $A \subset Y$ açık küme olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} A \in \sigma &\Rightarrow Y - A \in \sigma^t \\ &\Rightarrow f^{-1}(Y - A) \in \tau^t \qquad \ldots ((\textbf{iii}) \text{ ifadesinden}) \\ &\Rightarrow X - (f^{-1}(A)) \in \tau^t \quad \ldots \begin{pmatrix} f^{-1}(Y-A) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(A) \\ f^{-1}(Y) = X \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow f^{-1}(A) \in \tau \end{aligned}$$

elde edilir. (Burada f^{-1} öngörüntü fonksiyonu olduğundan her zaman için $f^{-1}(Y) = X$ sağlanır. Fonksiyonun örten olmasına gerek yoktur.)

(iv) $\Rightarrow$ **(i)** Herhangi bir $x \in X$ noktasını ve $f(x)$ noktasının herhangi bir $V \subset Y$ komşuluğunu ele alalım. Buradan

$$\begin{aligned} V \in \vartheta_{(f(x))} &\Rightarrow f(x) \in T \subset V & & \text{...}(T \in \sigma) \\ &\Rightarrow x \in f^{-1}(T) \subset f^{-1}(V) \\ &\Rightarrow f^{-1}(V) \in \vartheta_{(x)} \\ &\Rightarrow f,\ (c) & & \text{...}(T \in \sigma \Rightarrow f^{-1}(T) \in \tau) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Uyarı 3.2.4 $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \sigma)$ *fonksiyonunun her noktada sürekli olduğunu göstermek için en sık kullanılan kriterler açık ve kapalı kümelerin kullanıldığı kriterlerdir.*

$$\begin{aligned} f,(c) &\Leftrightarrow \forall U \in \sigma \text{ için } f^{-1}(U) \in \tau \\ f,(c) &\Leftrightarrow \forall F \in \sigma^t \text{ için } f^{-1}(F) \in \tau^t \end{aligned}$$

Teorem 3.2.5 $f : (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ *fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler denktir:*

(i) f *fonksiyonu süreklidir.*

(ii) $\forall A \subset Y$ *alt kümesi için* $f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset [f^{-1}(A)]^\circ$

(iii) $\forall A \subset Y$ *için* $\overline{(f^{-1}(A))} \subset f^{-1}(\bar{A})$.

İspat. **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)** f fonksiyonu sürekli olsun. Her $A \subset Y$ için

$$\begin{aligned} A \subset Y &\Rightarrow \overset{\circ}{A} \in \tau_2 \\ &\Rightarrow f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \in \tau_1 & & \text{...}(f \text{ sürekli}) \\ &\Rightarrow [f^{-1}(\overset{\circ}{A})]^\circ = f^{-1}(\overset{\circ}{A}) & & \text{...}\left(\square \in \tau \Rightarrow \overset{\circ}{\square} = \square\right) \\ &\Rightarrow f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset f^{-1}(A) & & \text{...}\left(\overset{\circ}{A} \subset A\right) \\ &\Rightarrow \left[f^{-1}(\overset{\circ}{A})\right]^\circ \subset f^{-1}(A)^\circ & & \text{...}\left(A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}\right) \\ &\Rightarrow f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset f^{-1}(A)^\circ \end{aligned}$$

olur.

(ii) $\Rightarrow$ **(iii)** $A \subset Y$ verilsin. Buradan

$$\begin{aligned}
A \subset Y &\Rightarrow Y - A \subset Y \\
&\Rightarrow f^{-1}\left[(Y-A)^{\circ}\right] \subset \left[f^{-1}(Y-A)\right]^{\circ} && \ldots (\textbf{(ii)} \text{ ifadesinden}) \\
&\Rightarrow f^{-1}(Y-\bar{A}) \subset \left[f^{-1}(Y-A)\right]^{\circ} && \ldots \left((Y-A)^{\circ} = Y - \bar{A}\right) \\
&\Rightarrow f^{-1}(Y) - f^{-1}\left(\bar{A}\right) \subset \left[f^{-1}(Y) - f^{-1}(A)\right]^{\circ} \\
&\Rightarrow X - f^{-1}(\bar{A}) \subset \left[X - f^{-1}(A)\right]^{\circ} \\
&\Rightarrow X - f^{-1}(\bar{A}) \subset X - \overline{f^{-1}(A)} && \ldots \left(\left[X - f^{-1}(A)\right]^{\circ} = X - \overline{f^{-1}(A)}\right) \\
&\Rightarrow \overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\bar{A})
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ **(i)** $F \subset Y$ kapalı alt küme olsun.Buradan

$$\begin{aligned}
F \subset Y, F \in \tau_2^t &\Rightarrow \overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(\bar{F}) && \ldots (\textbf{(iii)}) \text{ ifadesinden} \\
&\Rightarrow \overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(F) && \ldots \left(F \in \tau_2^t \Rightarrow \bar{F} = F\right) \\
&\Rightarrow \overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F) && \ldots \begin{pmatrix} \square \subset \bar{\square} \\ \square = f^{-1}(F) \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow f^{-1}(F) \in \tau_1^t \\
&\Rightarrow f,\ (c)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Teorem 3.2.6 *$f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\sigma)$ fonksiyonu ve $\mathfrak{B} \subset \sigma$ tabanı verilsin. Bu durumda f fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart her $B \in \mathfrak{B}$ için $f^{-1}(B) \in \tau$ olmasıdır.*

$$f,(c) \iff \forall B \in \mathfrak{B}, f^{-1}(B) \in \tau$$

İspat. $\Rightarrow f$ sürekli olsun. Her $B \in \mathfrak{B}$ için

$$\begin{aligned}
B \in \mathfrak{B} &\Rightarrow B \in \sigma && \ldots (\mathfrak{B} \subset \sigma) \\
&\Rightarrow f^{-1}(B) \in \tau && \ldots (f,(c))
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\Leftarrow \forall\ B \in \mathfrak{B}$ için $f^{-1}(B) \in \tau$ olsun. $V \in \sigma$ alalım. $\mathfrak{B}$ taban olduğu için,

$$V = \bigcup_{i \in I} \{\mathfrak{B}_i \subset Y \ :\ \exists B_i \in \mathfrak{B}\}$$

olur. V kümesinin öngörüntüsünün açık küme olacağını gösterelim.

$$\begin{aligned}
f^{-1}(V) &= f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) \\
&= \bigcup_{i\in I} \underbrace{f^{-1}(B_i)}_{\in\tau} \qquad ...(B\in\mathcal{B}\Rightarrow f^{-1}(B)\in\tau) \\
&\Rightarrow \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)\in\tau \qquad ...\,(\tau \text{ topoloji}) \\
&\Rightarrow f^{-1}(V)\in\tau \\
&\Rightarrow f,(c)
\end{aligned}$$

□

Teorem 3.2.7 *$f:(X,\tau)\longrightarrow(Y,\sigma)$ fonksiyonu verilsin. $\mathcal{S}\subset\sigma$ alt taban olmak üzere, f fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart her $\mathcal{S}$ için $f^{-1}(S)\in\tau$ olmasıdır.*

$$f,\ (c) \iff \forall s\in\mathcal{S},\ f^{-1}(S)\in\tau.$$

İspat. $\Rightarrow$ f fonksiyonu sürekli olsun. Her $S\in\mathcal{S}$ için,

$$\begin{aligned}
S\in\mathcal{S} &\Rightarrow S\in\sigma \qquad ...\,(\mathcal{S}\subset\sigma) \\
&\Rightarrow f^{-1}(S)\in\tau \qquad ...\,(f,(c))
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\Leftarrow$ Tersine $T\in\sigma$ açık küme olsun. $\mathcal{S}\subset\sigma$ alt taban olduğundan, I herhangi bir indis ailesi J sonlu bir indis ailesi olmak üzere

$$T=\bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j=1}^{n} S_{ij}\right) \qquad \ni\ S_{i_j}\in\mathcal{S}$$

olur. T kümesinin öngörüntüsünün açık küme olacağını gösterelim.

$$\begin{aligned}
f^{-1}(T) &= f^{-1}(\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j=1} S_{ij})) \\
&= \bigcup_{i\in I} f^{-1}(\bigcap_{j=1} S_{ij}) \\
&= \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j=1} \underbrace{f^{-1}(S_{ij})}_{\in\tau}) \qquad ...(S\in\mathcal{S}\Rightarrow f^{-1}(S)\in\tau \\
&\Rightarrow \underbrace{\bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j=1} f^{-1}(S_{ij}))}_{\in\tau} \qquad ...\left(\begin{array}{c}\text{Kapalı kümelerin sonlu}\\ \text{arakesiti kapalı küme}\end{array}\right) \\
&\Rightarrow \bigcup_{i\in I}(\bigcap_{j=1} f^{-1}(S_{ij}))\in\tau \quad ...\left(\begin{array}{c}\text{Açık kümelerin herhangi}\\ \text{birleşimi açık küme}\end{array}\right) \\
&\Rightarrow f^{-1}(T)\in\tau \\
&\Rightarrow f,(c)
\end{aligned}$$

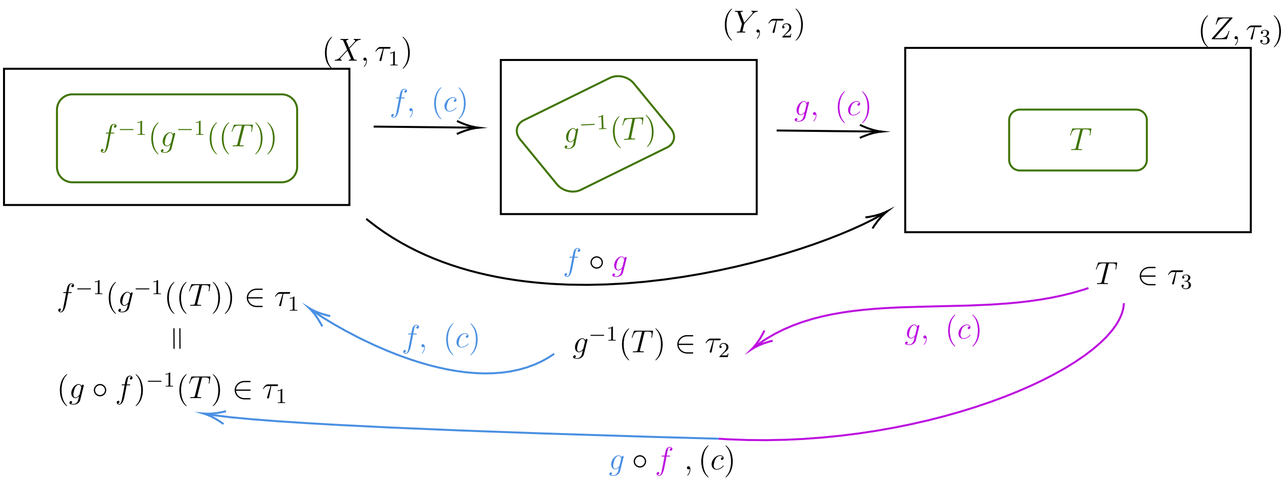
$\square$

Teorem 3.2.8 *$f(X,\tau_1) \to (Y,\tau_2)$ ve $g : (Y,\tau_2) \to (Z,\tau_3)$ fonksiyonları sürekli ise $g \circ f : X \to Z$ fonksiyonuda sürekli olur.*

İspat. $T \in \tau_3$ açık kümesi için

$$\begin{aligned}
T \in \tau_3 \quad &\Rightarrow \quad g^{-1}(T) \in \tau_2 && \dots (g,(c)) \\
&\Rightarrow \quad \underbrace{f^{-1}(g^{-1}(T))}_{\square_1} \in \tau_1 && \dots (f,(c)) \\
&\Rightarrow \quad \underbrace{(g \circ f)^{-1}(T)}_{\square_2} \in \tau_1 && \dots (\square_1 = \square_2) \\
&\Rightarrow \quad g \circ f, (c)
\end{aligned}$$

elde edilir.



$\square$

Örnek 3.2.9 *Tanım kümesi üzerinde ayrık uzay tanımlı olan*

$$f : (X, \mathcal{P}(X)) \to (Y, \sigma)$$

fonksiyon görüntü kümesi üzerindeki topolojiden bağımsız olarak her zaman süreklidir.

Çözüm: Her $A \in \sigma$ açık kümesi için

$$\begin{aligned}
A \in \sigma \quad &\Rightarrow \quad f^{-1}(A) \subset X \\
&\Rightarrow \quad f^{-1}(A) \in \mathcal{P}(X) \quad \dots \left(\begin{array}{c} \text{Ayrık uzayda her alt küme} \\ \text{açık küme olur} \end{array} \right) \\
&\Rightarrow \quad f, (c)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Örnek 3.2.10 *Görüntü kümesi üzerinde kaba uzay tanımlı olan*

$$f:(X,\tau)\to(Y,\{Y,\emptyset\})$$

fonksiyon tanım kümesi üzerindeki topolojiden bağımsız olarak her zaman süreklidir.

Çözüm: $(Y,\{Y,\emptyset\})$ uzayındaki açık kümeler $\emptyset$ ve Y kümeleridir. (X,τ) topolojik uzayı için $\emptyset, X\in\tau$ olduğundan

$$f^{-1}(Y)=X\in\tau \text{ ve } f^{-1}(\emptyset)=\emptyset\in\tau$$

elde edilir. O halde f fonksiyonu süreklidir. □

Uyarı 3.2.11 *Bir f fonksiyonunun sürekliliğini en zor olduğu durum tanım ve görüntü kümesi*

$$f:(X,\{X,\emptyset\})\to(Y,\mathcal{P}(Y))$$

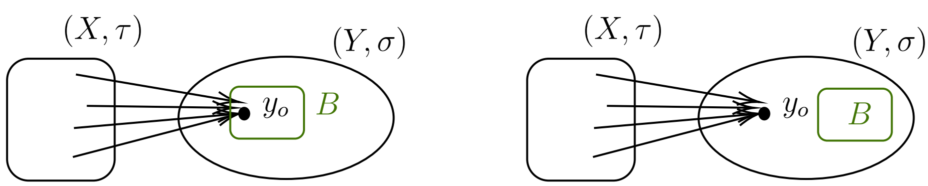
şeklindedir. X ve Y kümeleri birden fazla elemana sahipse tanım kümesinde kaba uzay ve görüntü kümesinde ayrık uzay tanımlı olduğunda sadece sabit fonksiyon sürekli olur.

Örnek 3.2.12 *$y_0\in Y$ sabit bir nokta olmak üzere her $x\in X$ noktası için, $f(x)=y_0$ şeklinde tanımlanan $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ sabit fonksiyonu süreklidir.*

Çözüm: Herhangi bir $B\in\sigma$ kümesi verilsin. B kümesinin öngörüntüsü

$$f^{-1}(B)=\begin{cases}\varnothing, & y_0\notin B\\ X, & y_0\in B\end{cases}$$

olur. $\emptyset, X\in\tau$ olduğundan $f^{-1}(B)\in\tau$ elde edilir. Sonuç olarak sabit fonksiyon sürekli olur.



$y_0\in B\Rightarrow f^{-1}(B)=X$ $\qquad$ $y_0\notin B\Rightarrow f^{-1}(B)=\emptyset$

□

Sonuç 3.2.13 *Sabit fonksiyon tanım ve görüntü kümesi üzerindeki topolojilerden bağımsız olarak her zaman süreklidir.*

Örnek 3.2.14 *$f:(X,\tau)\to(X,\tau)$ birim fonksiyonu süreklidir.*

Çözüm: $f : (X, \tau) \to (X, \tau)$ birim fonksiyonu, her $x \in X$ noktası için, $f(x) = x$ şeklinde tanımlıdır. Her $B \in \tau$ açık kümesi için

$$\begin{aligned} B \in \tau \quad &\Rightarrow \quad f^{-1}(B) = B \quad ...(f \text{ birim fonksiyon}) \\ &\Rightarrow \quad f^{-1}(B) \in \tau \qquad\qquad\qquad ...(B \in \tau) \\ &\Rightarrow \quad f, (c) \end{aligned}$$

elde edilir. □

Örnek 3.2.15 *X kümesi birden fazla eleman içeren bir küme ve*

$$f : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$$

birim fonksiyon olmak üzere eğer τ_1 topoloji τ_2 topolojisinden daha kaba ise birim fonksiyon sürekli değildir.

Çözüm: $\tau_1 \subset \tau_2$ olsun. Buradan

$$\exists U \in \tau_2 \quad \ni \quad U \notin \tau_1$$

olur. $U \in \tau_2$ için $f^{-1}(U) = U \notin \tau_1$ olduğundan f fonksiyonu sürekli değildir. □

Sonuç 3.2.16 *Birim fonksiyon her zaman sürekli değildir.*

Örnek 3.2.17 *I herhangi bir indis ailesi olmak üzere $(X, (\tau_i)_{i \in I})$ topolojiler ve (Y, σ) topolojisi verilsin. Eğer her $i \in I$ için*

$$f : (X, \tau_i) \to (Y, \sigma)$$

fonksiyonu sürekli ise,

$$f : \left(X, \bigcap_{i \in I} \tau_i = \tau \right) \to (Y, \sigma)$$

fonksiyonuda süreklidir.

Çözüm: Her $A \in \sigma$ kümesi için,

$$\begin{aligned} A \in \sigma \quad &\Rightarrow \quad \forall i \in I, f^{-1}(A) \in \tau_i \\ &\Rightarrow \quad f^{-1}(A) \in \bigcap_{i \in I} \tau_i \end{aligned}$$

olduğundan f fonksiyonu τ topolojisine göre süreklidir. □

Örnek 3.2.18 *(X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ birebir ve örten fonksiyonunun $x_0 \in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart her $A \subset X$ alt kümesi için, $x_0 \in A^{\sim}$ ise $f(x_0) \in f(A)^{\sim}$ olmasıdır.*

$$f \, \textit{birebir ve örten} \ \wedge \ f, x_0 \in X, (c) \iff (\forall A \subset X, x_0 \in A^{\sim} \Rightarrow f(x_0) \in f(A)^{\sim})$$

Çözüm: $\Rightarrow$ f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında sürekli olsun. Kabul edelim ki $x_0 \in A^{\sim}$ olsun. $f(x_0) \in f(A)^{\sim}$ olduğunu gösterelim. Buradan

$$\begin{aligned}
V \in \vartheta_{(f(x_0))} &\Rightarrow f^{-1}(V) \in \vartheta_{(x_0)} && \ldots (f, x_0 \in X, (c)) \\
&\Rightarrow A \cap (f^{-1}(V) - \{x_0\}) \neq \emptyset && \ldots (x_0 \in A^{\sim}) \\
&\Rightarrow f\left[A \cap \underbrace{(f^{-1}(V) - \{x_0\})}_{C}\right] \neq f(\emptyset) = \emptyset && \\
&\Rightarrow f(A) \cap f(f^{-1}(V) - \{x_0\}) \neq \emptyset && \ldots \left(\begin{array}{c} f \text{ birebir ise} \\ f(A \cap C) = f(A) \cap f(C) \end{array}\right) \\
&\Rightarrow f(A) \cap [V - \{f(x_0)\}] \neq \emptyset && \ldots (f \text{ örten} \Rightarrow ff^{-1} = Id) \\
&\Rightarrow f(x_0) \in f(A)^{\sim} &&
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\Leftarrow$ Tersine X kümesinin her A alt kümesi için, $x_0 \in A^{\sim}$ iken $f(x_0) \in f(A)^{\sim}$ olsun. f fonksiyonunun $x_0 \in X$ noktasında sürekli olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli olmasın. f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli olmadığından

$$\begin{aligned}
f, x_0 \in X, \sim(c) &\Rightarrow \forall U \in \vartheta_{(x_0)}, \exists V \in \vartheta_{(f(x_0))} \ni f(U) \nsubseteq V && (1) \\
&\Rightarrow \forall U \in \vartheta_{(x_0)},\ x \in U \ \wedge\ f(x) \notin V \text{ olacak şekilde } x \in X \text{ vardır} && (2)
\end{aligned}$$

olur. Bu şekildeki bütün x elemanlarını eleman kabul eden küme A kümesi olsun.

$$A = \{x \ : \ x \in U, f(x) \notin V \text{ ve } U \in \vartheta_{(x_0)}\}$$

(1) ifadesinden $x_0 \in A$ ve (2) ifadesinden $x_0 \in A^{\sim}$ sağlanır. Ancak X kümesinin her A alt kümesi için, $x_0 \in A^{\sim}$ iken $f(x_0) \in f(A)^{\sim}$ olduğundan, $f(x_0) \in f(A)^{\sim}$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Kabulümüz yanlıştır. f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir. □

Sonuç 3.2.19 *(X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere, $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ birebir ve örten fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart her $A \subset X$ alt kümesi için $f(A^{\sim}) \subset ((f(A))^{\sim})$ olmasıdır.*

Örnek 3.2.20 *(X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere, $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ birebir ve örten fonksiyonunun $x_0 \in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart her $A \subset X$ alt kümesi için $x_0 \in A^s$ ise $f(x_0) \in (f(A))^s$ olmasıdır.*

$$f \textit{ birebir ve örten} \ \wedge\ f, x_0 \in X, (c) \iff (\forall A \subset X, x_0 \in A^s \Rightarrow f(x_0) \in f(A)^s)$$

Çözüm: $\Rightarrow$ f fonksiyonunun $x_0 \in X$ noktasında sürekli olduğunu kabul edelim. Bir $A \subset X$ alt kümesi için $x_0 \in A^s$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
V \in \vartheta_{(f(x_0))} &\Rightarrow f^{-1}(V) \in \vartheta_{(x_0)} && ...(f, x_0 \in X, (c)) \\
&\Rightarrow \begin{array}{l} f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \\ f^{-1}(V) \cap (X-A) \neq \emptyset \end{array} && ...\left(\begin{array}{rcl} & & x_0 \in A^s, \\ A^s & = & \bar{A} - \mathring{A} \\ & = & \bar{A} \cap (X-A)^- \end{array} \right) \\
&\Rightarrow \begin{array}{l} f\left[f^{-1}(V) \cap A\right] \neq f(\emptyset) \quad \wedge \\ f\left[f^{-1}(V) \cap (X-A)\right] \neq f(\emptyset) \end{array} \\
&\Rightarrow \begin{array}{l} f(f^{-1}(V)) \cap f(A) \neq \emptyset \quad \wedge \\ f(f^{-1}(V)) \cap f\left[(X-A)\right] \neq \emptyset \end{array} && ...\left(\begin{array}{l} f(\emptyset) = \emptyset \\ f \text{ birebir} \end{array} \right) \\
&\Rightarrow V \cap f(A) \neq \emptyset \wedge V \cap (Y - f(A)) \neq \emptyset && ...\left(\begin{array}{c} f \text{ örten} \Rightarrow f f^{-1} = Id \\ \wedge f(X) = Y \end{array} \right) \\
&\Rightarrow f(x_0) \in f(A)^- \wedge f(x_0) \in (Y - f(A))^- \\
&\Rightarrow f(x_0) \in f(A)^s
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$\Leftarrow$ Tersine 3.2.3 teoremi gereğince (**ii**) $\Rightarrow$ (**i**) $\forall A \subset X, f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ sağlanıyorsa f fonksiyonu süreklidir ifadesi A kümesinin her kapanış noktası için sağlanır. $A^s \subset \bar{A}$ için

$$\forall x_0 \in A^s \Rightarrow x_0 \in \bar{A}$$

olduğundan ispat açıktır. □

Sonuç 3.2.21 *(X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere, $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ birebir ve örten fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart her $A \subset X$ alt kümesi için $f(A^s) \subset (f(A))^s$ olmasıdır.*

Örnek 3.2.22 *(X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere, $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ birebir ve örten fonksiyonunun $x_0 \in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart her $B \subset Y$ alt kümesi için $x_0 \in (f^{-1}(B))^{\sim}$ ise $x_0 \in f^{-1}(B^{\sim})$ olmasıdır.*

Çözüm: $\Rightarrow$ f fonksiyonunun $x_0 \in X$ noktasında sürekli, birebir ve örten olsun. (Y, σ) uzayının herhangi bir B alt kümesi için $x_0 \in (f^{-1}(B))^{\sim}$ olsun. Buradan

$$
\begin{aligned}
V \in \vartheta_{(f(x_0))} &\Rightarrow f^{-1}(V) \in \vartheta_{(x_0)} && \text{...}\,(f, x_0 \in X, (c)) \\
&\Rightarrow f^{-1}(B) \cap (\, f^{-1}(V) - \{x_0\}) \neq \emptyset && \text{...}\,(x_0 \in f^{-1}(B)^{\sim}) \\
&\Rightarrow f\,[\, f^{-1}(B) \cap (\, f^{-1}(V) - \{x_0\})] \neq f\,(\emptyset) \\
&\Rightarrow f\,(f^{-1}(B)) \cap f\,((\, f^{-1}(V) - \{x_0\})) \neq \emptyset && \text{...} \begin{pmatrix} f\,(\emptyset) = \emptyset \\ f \text{ birebir} \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow B \cap (V - \{f\,(x_0)\}) \neq \emptyset && \text{...}\,(f \text{ örten} \Rightarrow f f^{-1} = Id) \\
&\Rightarrow f\,(x_0) \in B^{\sim} \\
&\Rightarrow x_0 \in f^{-1}\,(B^{\sim})
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$\Leftarrow$ Tersine $f(x_0) \in B^{\sim}$ olduğunda $x_0 \in f^{-1}(B^{\sim})$ olsun. f fonksiyonunun, $x_0 \in X$ noktasında sürekli olduğunu göstereceğiz. Teorem 3.2.5 gereğince, (**iii**) $\Rightarrow$(**i**) $\forall A \subset Y$ için $\overline{(f^{-1}(A))} \subset f^{-1}(\bar{A})$ sağlanıyorsa f fonksiyonu süreklidir ve her yığılma noktası bir kapanış noktası olduğundan ispat açıktır. $\square$

Örnek 3.2.23 *(X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere, $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ birebir ve örten fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart her $B \subset Y$ alt kümesi için $(f^{-1}(B))^{\sim} \subset f^{-1}(B^{\sim})$ olmasıdır.*

Örnek 3.2.24 *(X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere, $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ bire bir ve örten fonksiyonunun $x_0 \in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart her $B \subset Y$ alt kümesi için $x_0 \in (f^{-1}(B))^s$ ise $x_0 \in (f^{-1}(B^s))$ olmasını gerektirmesidir.*

Çözüm: f fonksiyonunu birebir ve örten ve $x_0 \in X$ noktasında sürekli olsun. (Y, σ) uzayının herhangi bir B alt kümesi verilsin ve bu alt küme için $x_0 \in (f^{-1}(B))^S$ olsun.

Buradan

$$
\begin{array}{lll}
V \in \vartheta_{(f(x_0))} & \Rightarrow f^{-1}(V) \in \vartheta_{(x_0)} & \ldots (f, x_0 \in X, (c)) \\
& \Rightarrow \begin{array}{l} f^{-1}(V) \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset \quad \wedge \\ f^{-1}(V) \cap (X - f^{-1}(B)) \neq \emptyset \end{array} & \ldots \left(\begin{array}{rcl} & & x_0 \in f^{-1}(B)^s, \\ A^s & = & \overline{A} - \overset{\circ}{A} \\ & = & \overline{A} \cap (X - A)^- \end{array} \right) \\
& \Rightarrow \begin{array}{l} f\,[f^{-1}(V) \cap f^{-1}(B)] \neq f\,(\emptyset\,) \quad \wedge \\ f\ \ [\ f^{-1}(V) \cap (X - f^{-1}(B))] \neq f\,(\emptyset) \end{array} & \\
& \Rightarrow \begin{array}{l} f(f^{-1}(V)) \cap f\,(f^{-1}(B)) \neq \emptyset \quad \wedge \\ f(f^{-1}(V)) \cap f\,[(X - f^{-1}(B))] \neq \emptyset \end{array} & \ldots \left(\begin{array}{c} f\,(\emptyset) = \emptyset \\ f \text{ birebir} \end{array} \right) \\
& \Rightarrow V \cap B \neq \emptyset \ \wedge V \cap (Y - B) \neq \emptyset & \ldots \left(\begin{array}{c} f \text{ örten} \Rightarrow f f^{-1} = Id \\ \wedge\ f(X) = Y \end{array} \right) \\
& \Rightarrow f\,(x_0) \in \overline{B} \ \wedge\ f\,(x_0) \in (Y - B)^- & \\
& \Rightarrow f\,(x_0) \in f^{-1}(B)^s &
\end{array}
$$

elde edilir.

$\Leftarrow$ Tersine $f(x_0) \in B^s$ olduğunda $x_0 \in f^{-1}(B^s)$ olsun. f fonksiyonunun, $x_0 \in X$ noktasında sürekli olduğunu göstereceğiz. Teorem 3.2.5 gereğince, (**iii**) $\Rightarrow$(**i**) $\forall A \subset Y$ için $\overline{(f^{-1}(A))} \subset f^{-1}(\overline{A})$ sağlanıyorsa f fonksiyonu süreklidir ve kümenin sınırına ait her nokta bir kapanış noktası olduğundan ispat açıktır. $\square$

Sonuç 3.2.25 *(X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere, $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ birebir ve örten fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart her $B \subset Y$ alt kümesi için $(f^{-1}(B))^s \subset f^{-1}(B^s)$ olmasıdır.*

Örnek 3.2.26 *(X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar olmak üzere, $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ birebir ve örten fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart her $A \subset X$ alt kümesi için $(f(A))^\circ \subset f(\overset{\circ}{A})$ olmasıdır.*

Çözüm: $\Rightarrow$ $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ birebir örten ve sürekli bir fonksiyon olsun. (X, τ) uzayının her $A \subset X$ alt kümesi için $(f(A))^\circ \subset f(A^\circ)$ olduğunu göstermek için

$$f(x) \in (f(A))^\circ \Rightarrow f(x) \in f(\overset{\circ}{A})$$

ifadesi yerine bu ifadenin karşıt tersi

$$f(x) \notin f(\overset{\circ}{A}) \Rightarrow f(x) \notin (f(A))^\circ$$

ifadesini gösterelim. $f(x) \notin f(A^\circ)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} f(x) \notin f(A^\circ) &\Rightarrow x \notin \mathring{A} \\ &\Rightarrow x \in (X - \mathring{A}) \\ &\Rightarrow x \in (X - A)^- \quad ... \left(X - \mathring{A} = (X - A)^- \right) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} V \in \vartheta_{(f(x))} &\Rightarrow f^{-1}(V) \in \vartheta_{(x)} && ... (f, x_0 \in X, (c)) \\ &\Rightarrow (X - A) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset && ... (x \in (X - A)^-) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f\,[\,(X - A) \cap f^{-1}(V)] \neq f\,(\emptyset) \\ &\Rightarrow f\,[(X - A)] \cap f(f^{-1}(V)) \neq \emptyset && ... \begin{pmatrix} f\,(\emptyset) = \emptyset \\ f \text{ birebir} \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow (f\,(X) - f\,(A)) \cap V \neq \emptyset && ... (f \text{ örten} \Rightarrow f f^{-1} = Id) \\ &\Rightarrow (Y - f\,(A)) \cap V \neq \emptyset \\ &\Rightarrow f\,(x) \in (Y - f\,(A))^- \\ &\Rightarrow f\,(x) \in Y - f\big(\mathring{A}\big) \\ &\Rightarrow f\,(x) \notin f\big(\mathring{A}\big) \end{aligned}$$

elde edilir.

$\Leftarrow$ Tersine (X, τ) uzayının her $A \subset X$ alt kümesi için

$$(f(A))^\circ \subset f(A^\circ) \qquad (1)$$

olsun. f fonksiyonunun sürekli olduğunu göstereceğiz. Her $f(U) \in \sigma$ açık kümesi için

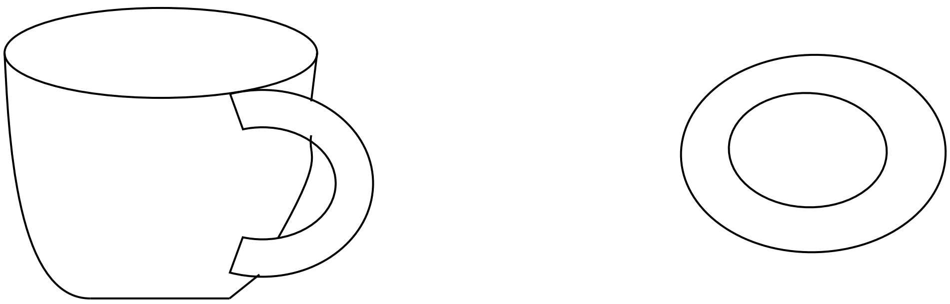
$f^{-1}(f(U)) \in \tau$ olduğunu gösterelim. $f(U) \subset Y$ için

$$\begin{aligned}
f(U) \subset Y \quad &\Rightarrow \quad (f(U))^{\circ} \subset f(\mathring{U}) && \ldots ((1) \text{ ifadesinden}) \\
&\Rightarrow \quad f(U) \subset f(\mathring{U}) && \ldots (f(U) \in \sigma \Rightarrow (f(U))^{\circ} = (f(U)) \\
&\Rightarrow \quad f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(f(\mathring{U})) && \\
&\Rightarrow \quad U \subset \mathring{U} && \ldots (f \text{ birebir } \Rightarrow f^{-1}f = Id) \\
&\Rightarrow \quad U = \mathring{U} && \ldots \left(\mathring{U} \subset U\right) \\
&\Rightarrow \quad U \in \tau && \\
&\Rightarrow \quad f \text{ sürekli} &&
\end{aligned}$$

elde edilir. □

3.3 Homeomorfizm

Bir simit ile çay fincanı homemomorftur. Simit içindeki delik, çay fincanındaki kulp ile eşleşir. Çay fincanının geri kalan kısmı, karelerin diske dönüşerek kaybolması ile simitin kalan kısmını tamamlar. Bu nedenle, topoloji bilen bir kişiden, bir simit ile bir çay fincanının yapısını farklı olarak görmeyen bir kişi olarak bahsedilebilir.



Topoloji bilmeyenler bu iki şekil arasındaki bağlantıyı anlayamacak

Tanım 3.3.1 *(X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzayları ve $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanırsa, f fonksiyonuna* ***homeomorfizm*** *denir:*

(i) *f fonksiyonu birebir*

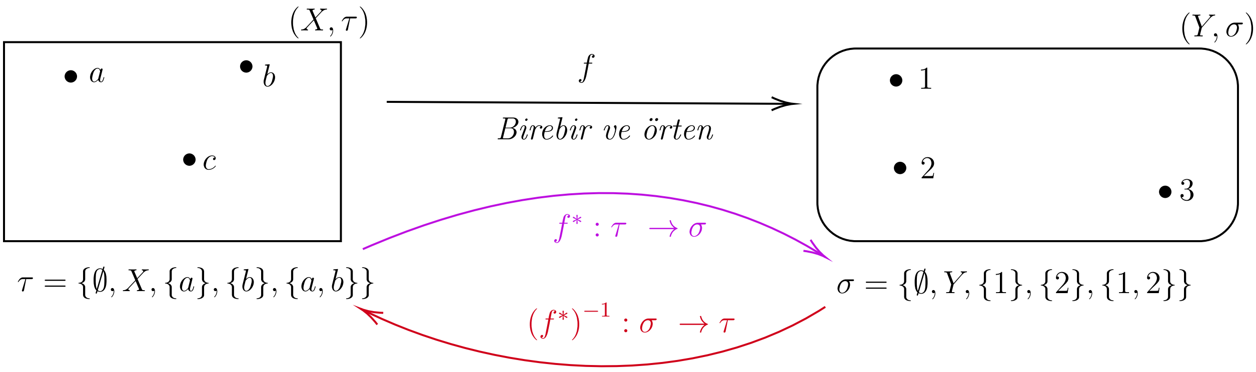
(ii) *f fonksiyonu örten*

(iii) *f fonksiyonu sürekli*

(iv) *f^{-1} fonksiyonu sürekli*

Tanım 3.3.2 *$f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu homeomorfizm ise (X,τ) ve (Y,σ) uzaylarına* ***homeomorf uzaylar*** *denir. X ve Y kümelerine* ***homeomorftur*** *(eş yapılıdır) denir ve $X\cong Y$ ile gösterilir.*

Örnek 3.3.3 *$A=\{a,b,c\}$, $Y=\{1,2,3\}$ kümeleri üzerinde sırasıyla $\tau=\{\emptyset,X,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ ve $\sigma=\{\emptyset,X,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$ topolojileri verilsin.*



$f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ bir homeomorfizm olması τ ailesinin açıkları ile σ ailesinin açıkları arasında birebir bir eşleşme gerektirir. Açık kümeler arasındaki bu birebir eşleşme f ve f^{-1} fonksiyonlarının sürekli olmasını gerektirir. Ayrıca her açık kümenin tümleyeni kapalı küme olacağından $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ bir homeomorfizm olması τ^t ailesi ile σ^t ailesi arasında da birebir bir eşleşme gerektirir.

f_1, f_2 ve f_3 fonksiyonları

$$\begin{array}{lll} f_1:X\to Y & f_2:X\to Y & f_3:X\to Y \\ \quad a\mapsto 1 & \quad a\mapsto 2 & \quad a\mapsto 3 \\ \quad b\mapsto 2 & \quad b\mapsto 1 & \quad b\mapsto 2 \\ \quad c\mapsto 3 & \quad c\mapsto 3 & \quad c\mapsto 1 \end{array}$$

şeklinde tanımlanırsa f_1 ve f_2 homemomorfizm olur. f_3 altında τ ailesindeki açık kümelerin görüntüsü σ ailesinde açık kümeler olmadığından f_3 homeomorfizm değildir.

Uyarı 3.3.4 *(X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzayları ve $f:X\to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer*

(i) *f fonksiyonu birebir ve örten,*

(ii) *$f(\tau)=\{f(T):T\in\tau\}=\sigma$*

özellikleri sağlanıyorsa bu takdirde f fonksiyonu bir homeomorfizmdir.

Uyarı 3.3.5 *(X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzayları ve $f:X\to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer*

(i) *f fonksiyonu birebir ve örten,*

(ii) *$f(\tau^t)=\{f(K):K\in\tau^t\}=\sigma^t$*

özellikleri sağlanıyorsa bu takdirde f fonksiyonu bir homeomorfizmdir.

Uyarı 3.3.6 *(X,τ) ve (Y,σ) topolojik uzayları ve $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer f fonksiyonu bir homeomorfizm ise bu takdirde $f^{-1} : (Y,\sigma) \to (X,\tau)$ fonksiyonu da bir homeomorfizmdir.*

Tanım 3.3.7 *$f : (X,\tau) \to (Y,\sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer (X,τ) uzayının her açık alt kümesinin görüntüsü (Y,σ) uzayında açık bir küme ise f fonksiyonuna* ***açık fonksiyon*** *denir.*

$$f \text{ açık fonksiyon} \iff \forall U \in \tau \text{ için } f(U) \in \sigma$$

Eğer (X,τ) uzayının her kapalı alt kümesinin görüntüsü (Y,σ) uzayında kapalı bir küme ise f fonksiyonuna ***kapalı fonksiyon*** *denir.*

$$f \text{ kapalı fonksiyon} \iff \forall F \in \tau^t \text{ için } f(F) \in \sigma^t$$

Örnek 3.3.8 *$X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ topolojisi verilsin.*

$$\begin{array}{rrcl} f: & (X,\tau) & \to & (X,\tau) \\ & x & \mapsto & f(x) = a \end{array}$$

olmak üzere

$$\forall U \in \tau \text{ için } f(U) = \{a\} \in \tau$$

olduğundan f açık fonksiyondur. Ancak $\{b,c\} \in \tau^t$ kapalı kümesi için $f(\{b,c\}) = \{a\} \notin \tau^t$ olduğundan f kapalı bir fonksiyon değildir.

Örnek 3.3.9 *$(\mathbb{R},\mathcal{U})$ alışılmış uzayında*

$$\begin{array}{rrcl} f: & (\mathbb{R},\mathcal{U}) & \to & (\mathbb{R},\mathcal{U}) \\ & x & \mapsto & f(x) = a \end{array}$$

olmak üzere

$$\forall U \in \mathcal{U}^t \text{ için } f(U) = \{a\} \in \mathcal{U}^t$$

olduğundan f kapalı fonksiyondur. Ayrıca $U =]0,1[$ açık kümesi için $f(U) = \{a\} \notin \mathcal{U}$ olduğundan f açık bir fonksiyon değildir.

Uyarı 3.3.10 *Bir fonksiyonun sürekli olması o fonksiyonun açık veya kapalı fonksiyon olmasını gerektirmez. Sabit fonksiyonun her zaman sürekli olduğunu biliyoruz. Örnek3.3.8 örneğinde sabit fonksiyon açık ama kapalı olmayan bir fonksiyon Örnek3.3.9 örneğinde ise sabit fonksiyon kapalı ama açık olmayan bir fonksiyon olduğuna dikkat ediniz.*

Örnek 3.3.11 *$X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ topolojisi verilsin.*

$$\begin{array}{rrcl} f: & (X,\tau) & \to & (X,\tau) \\ & x & \mapsto & f(x) = b \end{array}$$

olmak üzere $\{a\} \in \tau$ açık kümesi için $f(\{a\}) = \{b\} \notin \tau$ olduğundan f açık bir fonksiyon değildir. Ayrıca $\{b,c\} \in \tau^t$ kapalı kümesi için $f(\{b,c\}) = \{b\} \notin \tau^t$ olduğundan f kapalı bir fonksiyon değildir.

Sonuç 3.3.12 *"Bir fonksiyon açık fonksiyon değilse kapalı fonksiyondur" veya "Bir fonksiyon kapalı fonksiyon değilse açık fonksiyondur" çıkarımları yapılamaz. Bir fonksiyon ne açık ne de kapalı fonksiyon olabilir.*

Örnek 3.3.13 *$X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ topolojisi verilsin.*

$$\begin{array}{rrcl} f: & (X,\tau) & \to & (X,\tau) \\ & x & \mapsto & f(x) = a \end{array}$$

olmak üzere

$$\forall U \in \tau \text{ için } f(U) = \{a\} \in \tau$$

olduğundan f açık fonksiyondur. Ayrıca

$$\forall F \in \tau^t \text{ için } f(F) = \{a\} \in \tau^t$$

olduğundan f kapalı fonksiyondur.

Sonuç 3.3.14 *Bir fonksiyon hem açık fonksiyon hem de kapalı fonksiyon olabilir.*

Uyarı 3.3.15 *f fonksiyonunun sürekli olması halinde açık (kapalı) kümelerin öngörüntülerinin açık (kapalı) küme olduğunu biliyoruz. Sonuç olarak sürekli $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu birebir ($f^{-1}f = Id$) ve örten ($ff^{-1} = Id$) ise $f^{-1} : (Y, \sigma) \to (X, \tau)$ fonksiyonu da hem açık hem kapalı bir fonksiyon olur.*

Teorem 3.3.16 *$(X, \tau), (Y, \sigma)$ topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu birebir ve örten olmak üzere, f fonksiyonunun açık olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun kapalı olmasıdır.*

İspat. $\Rightarrow$ f fonksiyonu birebir, örten ve açık bir fonksiyon olsun. Buradan

$$\begin{array}{lll} f \text{ açık fonksiyon} & \Rightarrow & \forall U \in \tau \text{ için } f(U) \in \sigma \\ & \Rightarrow & X - U \in \tau^t \qquad \ldots (\forall U \in \tau \leftrightarrow X - U \in \tau^t) \\ & \Rightarrow & f\underbrace{(X - U)}_{\in \tau^t} = f(X) - f(U) = \overbrace{Y - \underbrace{f(U)}_{\in \sigma}}^{\in \sigma^t} \qquad \ldots (f \text{ örten}) \\ & \Rightarrow & f \text{ kapalı fonksiyon} \end{array}$$

elde edilir.

$\Leftarrow$ f fonksiyonu birebir, örten ve kapalı bir fonksiyon olsun. Buradan

$$\begin{array}{lll} f \text{ kapalı fonksiyon} & \Rightarrow & \forall F \in \tau^t \text{ için } f(F) \in \sigma^t \\ & \Rightarrow & X - F \in \tau \qquad \ldots (\forall F \in \tau^t \leftrightarrow X - F \in \tau) \\ & \Rightarrow & f\underbrace{(X - F)}_{\in \tau} = f(X) - f(F) = \overbrace{Y - \underbrace{f(F)}_{\in \sigma^t}}^{\in \sigma} \qquad \ldots (f \text{ örten}) \\ & \Rightarrow & f \text{ açık fonksiyon} \end{array}$$

elde edilir. $\square$

Teorem 3.3.17 *$(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu birebir ve örten olmak üzere, f fonksiyonunun açık olması için gerek ve yeter şart*

$$f^{-1}:(Y,\sigma)\to(X,\tau)$$

fonksiyonunun sürekli olmasıdır.

İspat. $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu birebir ve örten olsun. Buradan

$$\begin{aligned} f \text{ açık fonksiyon} &\Leftrightarrow \forall U\in\tau \text{ için } f(U)\in\sigma \\ &\Leftrightarrow \forall U\in\tau \text{ için } \left(f^{-1}\right)^{-1}(U)\in\sigma \quad ...\left(\left(f^{-1}\right)^{-1}=f \ \because f \ bijektif\right) \\ &\Leftrightarrow f^{-1} \text{ sürekli} \end{aligned}$$

elde edilir. $\square$

Sonuç 3.3.18 *$(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylar ve $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu birebir, örten ve sürekli olmak üzere, f fonksiyonunun açık olması, kapalı olması ve f^{-1} ters fonksiyonunun sürekli olması denk ifadelerdir.*

$$f\,açık \iff f \ kapalı \iff f^{-1} \ sürekli$$

Sonuç 3.3.19 *Homeomorfizm tanımında (tanım 3.3.1)* $(\mathbf{i}),(\mathbf{ii})$ *ve* $(\mathbf{iii})$ *sağlanması durumunda* $(\mathbf{iv})$ *ifadesi yerine*

$(\mathbf{iv}')$ *f açık fonksiyon*

$(\mathbf{iv}'')$ *f kapalı fonksiyon*

ifadelerinden bir tanesinin gösterilmesi yeterlidir.

Örnek 3.3.20 $\mathbb{R}$ *kümesi üzerinde alışılmış topoloji verilsin. $I_1=]a,b[$ ve $I_2=]c,d[$ boş kümeden farklı iki açık aralık olmak üzere I_1 ve I_2 homeomorftur.*

Çözüm: Açık aralıkların tanımı gereği I_1 ve I_2 boş kümeden farklı olduklarından $a<b$ ve $c<d$ olur. Buradan $a-b\neq 0$ ve $c-d\neq 0$ elde edilir. Her $x\in I_1$ için

$$\begin{aligned} f: \ I_1 &\to I_2 \\ x &\mapsto f(x)=c+\frac{(d-c)(x-a)}{b-a} \end{aligned}$$

fonksiyonu iyi tanımlı birebir örten ve süreklidir. Ayrıca Her $y\in I_2$ için

$$\begin{aligned} f^{-1}: \ I_2 &\to I_1 \\ x &\mapsto f(x)=a+\frac{(b-a)(x-c)}{d-c} \end{aligned}$$

fonksiyonu sürekli olduğundan $I_1\cong I_2$ elde edilir. $\square$

Sonuç 3.3.21 $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında açık aralıklar birbirine homeomorftur.*

Sonuç 3.3.22 $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ *uzayında kapalı aralıklar birbirine homeomorftur.*

Örnek 3.3.23 $\mathbb{R}$ *kümesi üzerinde alışılmış topoloji verilsin.* $f : \mathbb{R} \to]-1,+1[$, *her* $x \in \mathbb{R}$ *noktası için*

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

şeklinde tanımlanan f *fonksiyonu bir homeomorfizmdir.*

Çözüm: f fonksiyonunun birebir ve örten fonksiyon olduğu açıktır. Buradan $f^{-1} :]-1,+1[\to \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x \in]-1,+1[$ noktası için

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$$

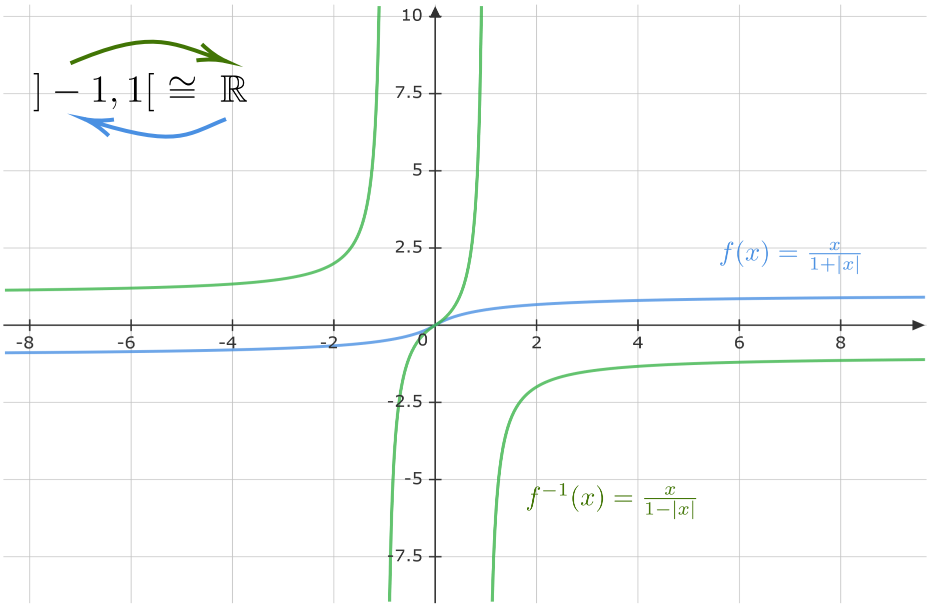
şeklinde tanımlıdır. Ayrıca her $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $(x_1 < x_2)$ noktaları için $f(x_1) < f(x_2)$ olduğundan f fonksiyonu artan bir fonksiyondur. Sonuç olarak $-1 < c < d < +1$ koşulunu sağlayan her $]c,d[\subset \mathbb{R}$ açık aralığı için

$$f^{-1}\big(]c,d[\big) = \left]\frac{c}{1-|c|}, \frac{d}{1-|d|}\right[\in \mathcal{U}$$

olduğundan f fonksiyonu süreklidir. Ayrıca her $]a,b[\subset \mathbb{R}$ açık aralığı için

$$f\big(]a,b[\big) = \left]\frac{a}{1+|a|}, \frac{b}{1+|b|}\right[\in \mathcal{U}$$

olduğundan f fonksiyonu açık fonksiyondur. Sonuç olarak f fonksiyonu bir homeomorfizmdir. O halde $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ile $]-1,+1[$ açık aralığı homeomorftur ve $\mathbb{R} \cong]-1,+1[$ şeklinde gösterilir.



$\square$

Örnek 3.3.24 $\mathbb{R}$ *kümesi üzerinde alışılmış topoloji verilsin.* $f :]-1,+1[\to \mathbb{R}$ *fonksiyonu her* $x \in]-1,+1[$ *noktası için*

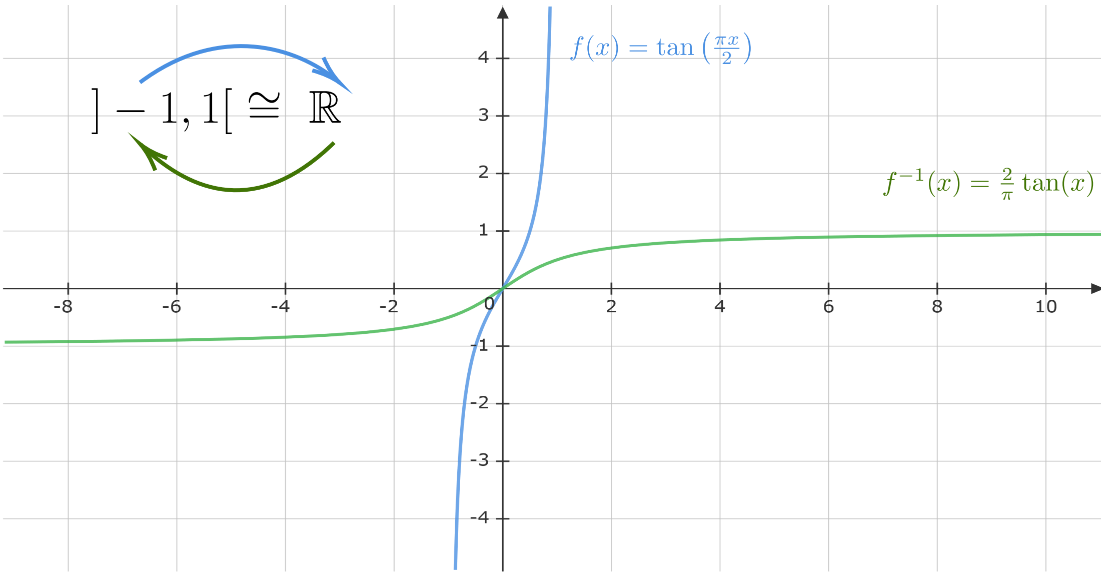
$$f(x) = tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde f *fonksiyonu bir homeomorfizmdir.*

Çözüm: f fonksiyonu birebir, örten ve süreklidir. Ayrıca her $x \in \mathbb{R}$ noktası için

$$f^{-1}(x) = \frac{2}{\pi} arctan x$$

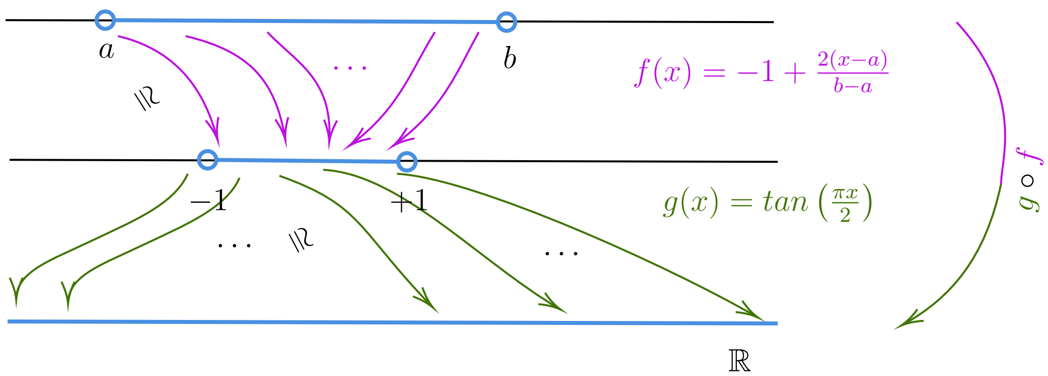
şeklinde tanımlanan f^{-1} fonksiyonu da süreklidir. Buradan f fonksiyonu bir homeomorfizmdir ve $]-1,+1[\cong \mathbb{R}$ olur.



$\square$

Lemma 3.3.25 *$f : X \to Y$ bir homeomorfizm ve $g : Y \to Z$ bir homeomorfizm ise $g \circ f : X \to Z$ bir homeomorfizm olur. X uzayı Y uzayına homeomorf ve Y uzayıda Z uzayına homeomorf ise X uzayı Z uzayına homeomorf olur.*

Sonuç 3.3.26 *$(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış uzayında her açık aralık $\mathbb{R}$ kümesine homemorf olur.*



$]a, b[\ \cong\ ]-1, +1[\ \cong\ \mathbb{R}$

Tanım 3.3.27 *$f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ bir homeomorfizm olmak üzere (X, τ) topolojik uzayına ait bir (p) özelliği (Y, σ) uzayında da bulunuyorsa (p) özelliğine **topolojik özellik** denir.*

Örnek 3.3.28 *$]-1, +1[\cong \mathbb{R}$ olmasına rağmen $]-1, +1[$ ve $\mathbb{R}$ farklı uzunluklara sahiptir. Buradan uzunluk bir topolojik özellik değildir.*

Bölüm 4

MEVCUT TOPOLOJİDEN YENİ TOPOLOJİ

4.1 Operatör ile Topoloji Elde Etmek

Topolojide, Kuratowski kapanış aksiyomları, bir kümenin üzerinde topolojik yapıyı tanımlamak için kullanılabilen bir dizi aksiyomlardır. Bu aksiyomlar daha yaygın olarak kullanılan açık küme tanımına eşdeğerdirler. İlk kez Kazimierz Kuratowski tarafından formalize edilmişlerdir ve daha sonra Wacław Sierpiński ve António Monteiro gibi matematikçiler tarafından incelenmiştir.

Benzer bir aksiyom kümesi, bir kümenin içi, dışı ve sınırı kavramları kullanılarak bir topolojik yapının tanımlanması kullanılmıştır.

Tanım 4.1.1 *$X \neq \emptyset$ olmak üzere her $A \subset X$ alt kümesi için*

$$\begin{array}{rccc} \alpha\colon & \mathcal{P}(X) & \to & \mathcal{P}(X) \\ & A & \mapsto & \alpha(A) \end{array}$$

dönüşümü

$$\begin{array}{ll} [K1] & \alpha(\emptyset) = \emptyset \\ [K2] & \textit{Her } A \subseteq X \textit{ için}, \quad A \subseteq \alpha(A) \\ [K3] & \textit{Her } A \subseteq X \textit{ için}, \quad \alpha(A) = \alpha(\alpha(A)) \\ [K4] & \textit{Her } A, B \subseteq X \textit{ için}, \quad \alpha(A \cup B) = \alpha(A) \cup \alpha(B) \end{array}$$

aksiyomlarını sağlıyorsa α dönüşümüne ***Kuratowski kapanış operatörü****, $[K1], [K2], [K3], [K4]$ aksiyomlarına* ***Kuratowski kapanış aksiyomları*** *denir.*

Uyarı 4.1.2 *α operatörünün birleşim işlemini koruma özelliğinden ($[K4]$) bir sonuç olarak, aşağıdaki koşul elde edilir:*
*$[K4']$ Sıra koruyan (**monoton**) olması: $A \subseteq B \Rightarrow \alpha(A) \subseteq \alpha(B)$.*

*Ayrıca $[K4]$ ifadesinden daha zayıf bir aksiyom olan $[K4'']$ (**alt toplamcılık**) özelliği*
$[K4'']$ Alt toplamcı olması: Her $A, B \subseteq X$ için, $\alpha(A \cup B) \subseteq \alpha(A) \cup \alpha(B)$
olarak verilir. Bu durumda $[K4']$ ve $[K4'']$ aksiyomları birlikte $[K4]$ ile eşdeğerdir.

$$[K4'] \ \wedge [K4''] \iff [K4]$$

Tanım 4.1.3 *Eğer α dönüşümü $[K1], [K2], [K4]$ aksiyomlarını sağlıyorsa α dönüşümüne **Čech kapanış operatörü**, eğer $[K2], [K3], [K4']$ aksiyomlarını sağlıyorsa **Moore kapanış***
***operatörü** denir.*

Teorem 4.1.4 *X kümesi üzerinde*

$$\mathcal{K} = \{A \subset X \ : \alpha(A) = A\}$$

ailesi bir topoloji belirtir.

İspat. $\mathcal{K}$ ailesinin kapalılar aksiyomlarını sağladığını gösterelim.

T_1'. $[K1]$ ifadesinden

$$\alpha(\emptyset) = \emptyset \implies \emptyset \in \mathcal{K}$$

olur. $[K2]$ ifadesinde $A = X$ alınırsa $X \subseteq \alpha(X)$ olur. α Kuratowski kapanış operatörü tanımından $\alpha(X) \subseteq X$ olduğundan

$$X \in \mathcal{K}$$

elde edilir.

T_2'. I herhangi bir indis ailesi olmak üzere $A_i \in \mathcal{K}$ olsun. $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{K}$ olduğunu gösterelim.
Bir $j \in I$ için $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \subset A_j$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i\in I} A_i \subset A_j \quad & \Rightarrow \quad \alpha\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \alpha\left(A_j\right) && \text{... } (\alpha \text{ monoton}) \\
& \Rightarrow \quad \alpha\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset A_j && \text{... } (\alpha\left(A_j\right) = A_j) \\
& \Rightarrow \quad \alpha\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \ \bigcap_{i\in I} Ai && \text{... } (\forall i \in I \text{ için sağlanır}) \\
& \Rightarrow \quad \alpha\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \ \bigcap_{i\in I} Ai && \text{... } \left([K2] \text{ ifadesinden } \bigcap_{i\in I} Ai \ \subset \ \alpha\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\right) \\
& \Rightarrow \quad \bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{K}
\end{aligned}$$

elde edilir.

T_3'. $A, B \in \mathcal{K}$ için $A \cup B \in \mathcal{K}$ olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
\alpha(A\cup B) &= \alpha(A)\cup\alpha(B) && \ldots([K4]\ \text{ifadesinden})\\
&= A\cup B && \ldots\begin{pmatrix} A\in\mathcal{K}\Rightarrow\alpha(A)=A\\ B\in\mathcal{K}\Rightarrow\alpha(B)=B\end{pmatrix}\\
&\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{K} && \ldots(\alpha(A\cup B)=A\cup B)
\end{aligned}
$$

□

Uyarı 4.1.5 *$\mathcal{K}$ ailesi kapalılar aksiyomlarını sağladığından*

$$\tau=\{B\subset X\ :B=X-A,\ A\in\mathcal{K}\}$$

ailesi X kümesi üzerinde açıklar aksiyomlarını sağlar.

Teorem 4.1.6 *Bir (X,τ) topolojik uzayında α Kuratowski kapanış operatörü olmak üzere*

$$\alpha(A)=\bar{A}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $A\subset X$ için

$$
\begin{aligned}
A\subset X &\Rightarrow \alpha(\alpha(A))=\alpha(A) && \ldots([K3]\ \text{ifadesinden})\\
&\Rightarrow \alpha(A)\in\mathcal{K}\\
&\Rightarrow A\subset\alpha(A) && \ldots([K2]\ \text{ifadesinden})\\
&\Rightarrow \bar{A}\subset\alpha(A) && \ldots\begin{pmatrix}\bar{A}\ \text{kümesi } A \text{ kümesini kapsayan}\\ \text{en küçük kapalı küme ve } \alpha(A)\in\mathcal{K}\end{pmatrix}\\
& && (1)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca $\bar{A}$ kümesi A kümesini kapsayan en küçük kapalı küme olduğundan $\bar{A}$ kümesini A kümesini kapsayan bütün kapalı kümelerin arakesiti olduğundan A kümesinin kapanışı

$$\bar{A}=\bigcap\underbrace{\{F\subset X\ :A\subset F\ \wedge\ F\in\tau^t=\mathcal{K}\}}_{F^*}$$

olarak yazabilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
F\in\mathcal{K} &\Rightarrow F=\alpha(F)\\
&\Rightarrow F=\alpha(A\cup F) && \ldots(A\subset F)\\
&\Rightarrow F=\alpha(A)\cup\alpha(F) && \ldots([K4]\ \text{ifadesinden})\\
&\Rightarrow F=\alpha(A)\cup F && \ldots(F=\alpha(F))\\
&\Rightarrow \alpha(A)\subset F\\
&\Rightarrow \alpha(A)\subset\bigcap F^* && \ldots(\forall F\subset X\ \text{için sağlanır})\\
&\Rightarrow \alpha(A)\subset\bar{A} && (2)
\end{aligned}
$$

olur. (1) ve (2) ifadelerinden

$$\alpha(A) = \bar{A}$$

eşitliği elde edilir. $\square$

Teorem 4.1.7 *$X \neq \emptyset$ olmak üzere her $A \subset X$ alt kümesi için*

$$\begin{array}{rccc} \beta\colon & \mathcal{P}(X) & \to & \mathcal{P}(X) \\ & A & \mapsto & \beta(A) \end{array}$$

dönüşümü

$$\begin{array}{ll} [I1] & \beta(\emptyset) = \emptyset \\ [I2] & \textit{Her } A \subseteq X \textit{ için}, \quad \beta(A) \subseteq A \\ [I3] & \textit{Her } A \subseteq X \textit{ için}, \quad \beta(A) = \beta(\beta(A)) \\ [I4] & \textit{Her } A, B \subseteq X \textit{ için}, \quad \beta(A \cap B) = \beta(A) \cap \beta(B) \end{array}$$

özelliklerini sağlasın. Bu durumda

$$\beta(A) = \overset{\circ}{A}$$

ailesi X kümesi üzerinde bir topoloji belirtir.

İspat. τ ailesinin açıklar aksiyomlarını sağladığını gösterelim.

T_1. $[I1]$ ifadesinden

$$\beta(X) = X \implies X \in \tau$$

olur. $[I2]$ ifadesinde $A = \emptyset$ alınırsa $\beta(\emptyset) \subseteq \emptyset$ olacağından

$$\beta(\emptyset) = \emptyset \in \tau$$

elde edilir.

T_2. I herhangi bir indis ailesi olmak üzere $A_i \in \tau$ olsun. $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \tau$ olduğunu gösterelim. Bir $j \in I$ için $A_j \subset \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} A_j \subset \bigcup_{i \in I} A_i &\Rightarrow \beta(A_j) \subset \beta\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) && \ldots (\beta \text{ monoton}) \\ &\Rightarrow A_j \subset \beta\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) && \ldots (\beta(A_j) = A_j) \\ &\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \subset \beta\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) && \ldots (\forall i \in I \text{ için sağlanır}) \\ &\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i = \beta\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) && \ldots \left([I2] \text{ ifadesinden } \beta\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcup_{i \in I} A_i\right) \\ &\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau \end{aligned}$$

T_3. $A, B \in \tau$ için $A \cap B \in \tau$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\beta(A \cap B) &= \beta(A) \cap \beta(B) && \text{...}([I4] \text{ ifadesinden}) \\
&= A \cap B && \text{...}\begin{pmatrix} A \in \tau \Rightarrow \beta(A) = A \\ B \in \tau \Rightarrow \beta(B) = B \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow A \cap B \in \tau && \text{...}(\beta(A \cap B) = A \cap B)
\end{aligned}$$

□

Teorem 4.1.8 *Bir (X, τ) topolojik uzayında β operatörü için*

$$\beta(A) = \overset{\circ}{A}$$

eşitliği sağlanır.

İspat.

$A \subset X$ için

$$\begin{aligned}
A \subset X &\Rightarrow \beta(\beta(A)) = \alpha(A) && \text{...}([I3] \text{ ifadesinden}) \\
&\Rightarrow \beta(A) \in \tau \\
&\Rightarrow \beta(A) \subset A && \text{...}([I2] \text{ ifadesinden}) \\
&\Rightarrow \beta(A) \subset \overset{\circ}{A} && \text{...}\begin{pmatrix} \overset{\circ}{A} \text{ kümesi } A \text{ kümesinin kapsadığı} \\ \text{büyük açık küme ve } \beta(A) \in \tau \end{pmatrix} \\
& && (1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\overset{\circ}{A}$ kümesi A kümesinin kapsadığı en büyük açık küme olduğundan $\overset{\circ}{A}$ kümesini A kümesi tarafından kapsanan bütün açık kümelerin birleşimi şeklinde

$$\bar{A} = \bigcup \underbrace{\{G \subset X \ : G \subset A \ \wedge \ G \in \tau\}}_{G^*}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned}
G \in \tau &\Rightarrow G = \beta(G) \\
&\Rightarrow G = \beta(A \cap G) && \text{...}(G \subset A) \\
&\Rightarrow G = \beta(A) \cap \beta(G) && \text{...}([I4] \text{ ifadesinden}) \\
&\Rightarrow G = \beta(A) \cap G && \text{...}(G = \beta(G)) \\
&\Rightarrow G \subset \beta(A) \\
&\Rightarrow \bigcup G^* \subset \beta(A) && \text{...}(\forall G \subset X \text{ için sağlanır}) \\
&\Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \beta(A) && (2)
\end{aligned}$$

olur. (1) ve (2) ifadelerinden

$$\beta(A) = \mathring{A}$$

eşitliği elde edilir. $\square$

4.2 Başlangıç Topolojisi

Bu bölümde verilen bir fonksiyondan yararlanarak görüntü kümesi üzerindeki topolojiden tanım kümesi üzerinde bir topoloji elde edeceğiz. Sonrasında bu yöntemi genelleştirerek başlangıç topolojisinin tanımını vereceğiz.

Teorem 4.2.1 *$f : X \to Y$ bir fonksiyon ve σ ailesi Y kümesi üzerinde bir topoloji olmak üzere*

$$\tau_i = \{A \subset X \ : A = f^{-1}(V),\ v \in \sigma\}$$

ailesi X kümesi üzerinde bir topoloji belirtir.

İspat. T_1. (Y, σ) bir topolojik uzay olduğundan $\emptyset, Y \in \sigma$ için

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(Y) = X$$

olduğundan $\emptyset, X \in \tau_i$ olur. (Burada f^{-1} öngörüntü fonksiyonu olduğundan $f^{-1}(Y) = X$ olması için f fonksiyonunun örten olmasına gerek yoktur.)

T_2. I herhangi bir indis ailesi olmak üzere her $i \in I$ için $A_i \in \tau_i$ olsun. $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \tau_i$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} A_i \in \tau_i \ &\Rightarrow\ \exists V_i \in \sigma \ni f^{-1}(V_i) = A_i \\ &\Rightarrow\ \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i) \\ &\Rightarrow\ \bigcup_{i \in I} A_i = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} V_i\right) \qquad ... \left(V_i \in \sigma \Rightarrow \bigcup_{i \in I} V_i \in \sigma\right) \\ &\Rightarrow\ \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau_i \end{aligned}$$

T_3. $A_1, A_2 \in \tau_i$ olsun. $A_1 \cap A_2 \in \tau_i$ olduğunu gösterelim. $A_1, A_2 \in \tau_i$ olduğundan

$$\exists V_1, V_2 \in \sigma \ \ni f^{-1}(V_1) = A_1 \text{ ve } f^{-1}(V_2) = A_2$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 \ &=\ f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \\ &=\ f^{-1}(V_1 \cap V_2) \qquad ... (V_1, V_2 \in \sigma \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \sigma) \\ &\Rightarrow\ A_1 \cap A_2 \in \tau_i \end{aligned}$$

elde edilir. □

Tanım 4.2.2 *$f : X \to Y$ bir fonksiyon ve σ ailesi Y kümesi üzerinde bir topoloji olmak üzere*

$$\tau_i = \{A \subset X \ : A = f^{-1}(V),\ v \in \sigma\}$$

topolojisine σ topolojisinin f fonksiyonu altındaki öngörüntüsü denir.

Uyarı 4.2.3 *$f : X \to Y$ fonksiyonu için σ topolojisinin f fonksiyonu altındaki öngörüntüsü τ_i ailesi olmak üzere*

- *σ topolojisi değiştikçe τ_i ailesi değişir.*
- *f fonksiyonunun tanımı değiştikçe τ_i ailesi değişir.*
- *her $V \in \sigma$ açık kümesi için $f^{-1}(V) \in \tau_i$ olduğundan $f : (X, \tau_i) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu süreklidir.*

Teorem 4.2.4 *$f : (X, \tau_2) \to (Y, \sigma)$ sürekli bir fonksiyon ve σ topolojisinin f fonksiyonu altındaki öngörüntüsü τ_i topolojisi ise*

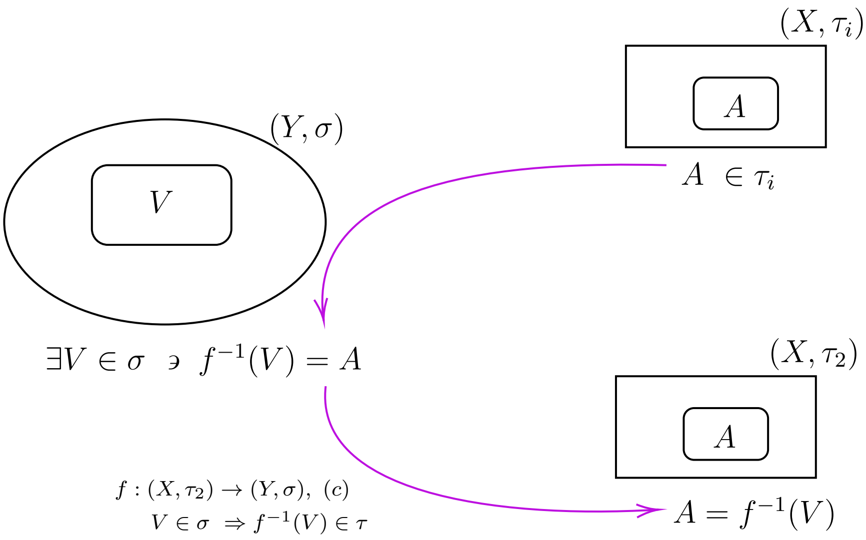
$$\tau_i \subset \tau_2$$

olur.

İspat. $A \in \tau_i$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} A \in \tau_i \quad &\Rightarrow \quad \exists V \in \sigma \quad \ni \quad A = f^{-1}(V) \\ &\Rightarrow \quad A \in \tau_2 \qquad\qquad \dots \left(\begin{array}{c} f,\ (c) \text{ ise } V \in \sigma \ \Rightarrow f^{-1}(V) \in \tau_2 \\ A = f^{-1}(V) \end{array} \right) \\ &\Rightarrow \quad \tau_i \subset \tau_2 \end{aligned}$$

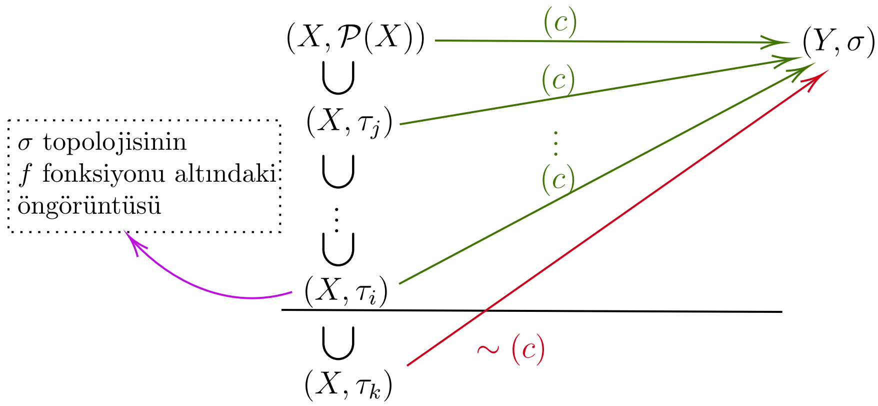
elde edilir.



$\square$

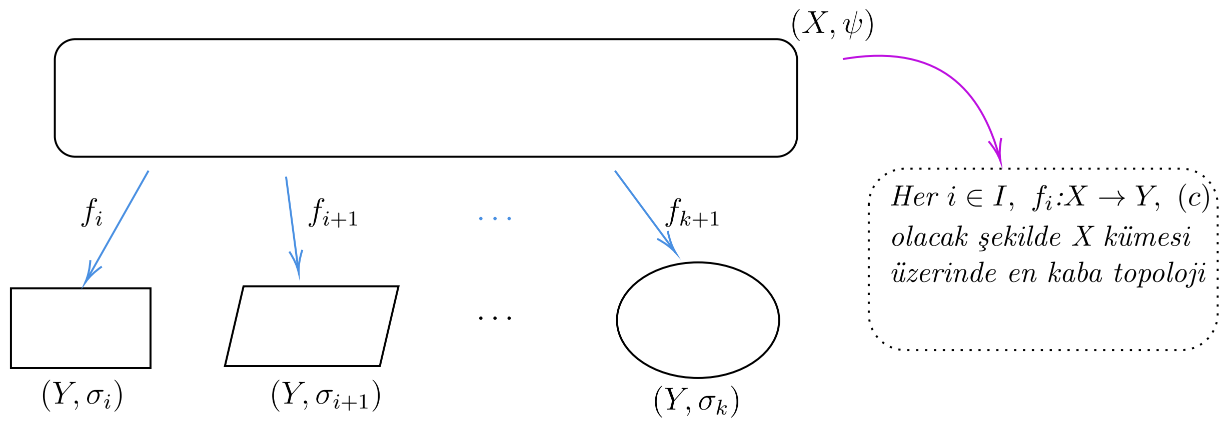
Sonuç 4.2.5 *(Y, σ) topolojik uzay olmak üzere $f : X \to Y$ fonksiyonu sürekli olacak şekilde X kümesi üzerinde tanımlanabilecek en kaba topoloji σ topolojisinin f fonksiyonu altındaki öngörüntüsüdür.*

Not. $f : (X, \mathcal{P}(X)) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonunun her zaman sürekli olduğunu biliyoruz. Tanım kümesindeki topoloji kabalaştıkça süreklilik özelliği azalacak ve bir yerden sonra süreklilik sağlanmayacaktır. Burada sürekliliği sağlayan en kaba topoloji σ topolojisinin f fonksiyonu altındaki öngörüntüsü olacaktır.



□

Tanım 4.2.6 *$X \neq \emptyset$, $(Y_i, \sigma_i)_{i \in I}$ topolojik uzaylar ailesi, ve her $i \in I$ için $f_i \colon X \to Y_i$ olmak üzere $(f_i)_{i \in I}$ fonksiyonlar ailesi verilsin. Her $i \in I$ için f_i fonksiyonları sürekli olacak şekilde X kümesi üzerindeki en kaba topolojiyi ψ ile gösterelim. ψ topolojisine $(\sigma_i)_{i \in I}$ topolojilerinin $(f_i)_{i \in I}$ fonksiyonlar ailesine göre başlangıç (izdüşel) topolojisi denir. (X, ψ) uzayına da $(Y_i, \sigma_i)_{i \in I}$ uzaylarının $(f_i)_{i \in I}$ fonksiyonlar ailesine göre başlangıç uzayı denir.*



Uyarı 4.2.7 *Bir karışıklık ihtimali olmadığı sürece ψ topolosine X kümesi üzerindeki başlangıç topolojisi diyeceğiz.*

Teorem 4.2.8 *$X \neq \emptyset$, $(Y_i, \sigma)_{i \in I}$ topolojik uzaylar ailesi ve her $i \in I$ için $f_i \colon X \to Y_i$ olmak üzere $(f_i)_{i \in I}$ fonksiyonlar ailesi verilsin.*

$$\mathcal{S} = \{A_{i_j} \subset X \ : \ \exists i \in I, \ \exists V \in \sigma_i, \ \ni A_{i_j} = f_i^{-1}(V)\}$$

ailesini alt taban kabul eden X kümesi üzerindeki topoloji, $((Y_i,\sigma_i),f_i)_{i\in I}$ ailesine karşılık gelen X kümesi üzerindeki başlangıç topolojisidir.

İspat. $\mathcal{S}$ ailesinin sonlu arakesitlerinin herhangi birleşimleri ile üretilen $\tau(\mathcal{S})$ ailesi X kümesi üzerinde bir topoloji olur. Her $i\in I$ için $f_i\colon X\to Y_i$ olmak üzere $(f_i)_{i\in I}$ fonksiyonlar ailesi için X kümesi üzerindeki topoloji ψ olmak üzere

$$\tau(\mathcal{S})=\psi$$

olduğunu gösterelim. $A\in\tau(\mathcal{S})$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
A\in\tau(\mathcal{S}) \;&\Rightarrow\; A=\bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J}A_{i_j}\right) && \ldots\left(\begin{array}{c}\mathcal{S}\text{ taban}, \exists A_{i_j}\in\mathcal{S}\\ J\text{ sonlu}\end{array}\right)\\
&\Rightarrow\; A=\underbrace{\bigcup_{i\in I}\underbrace{\left(\bigcap_{j\in J}\underbrace{f_i^{-1}(V)}_{\in\psi\ (\because f_i,(c))}\right)}_{\in\psi\ (\because\psi\text{ topoloji})}}_{\in\psi\ (\because\psi\text{ topoloji}))} && \ldots\big(A_{i_j}\in\mathcal{S}\Rightarrow\exists V\in\sigma_i\ \ni A_{i_j}=f_i^{-1}(V)\big)\\
&\Rightarrow\; A\in\psi\\
&\Rightarrow\; \tau(\mathcal{S})\subset\psi && (1)
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca $V\in\sigma_i$ açık kümesi için $\mathcal{S}$ ailesinin tanımından $f^{-1}(V)\in\mathcal{S}$ ve $f^{-1}(V)\subset\tau(\mathcal{S})$ olacağından her $i\in I$ için $f_i\colon(X,\tau(\mathcal{S}))\to(Y_i,\sigma_i)$ sürekli olur. Buradan başlangıç topolojisinin tanımından

$$\psi\subset\tau(\mathcal{S}) \qquad (2)$$

olur. (1) ve (2) ifadelerinden

$$\tau(\mathcal{S})=\psi$$

elde edilir. □

Örnek 4.2.9 *$X=\{a,b,c,d\}$, $Y_1=\{1,2\}$ ve $Y_2=\{1,2,3\}$ kümeleri verilsin.*

$$\sigma_1=\{Y_1,\emptyset,\{1\}\}$$

ailesi Y_1 kümesi üzerinde bir topoloji ve

$$\sigma_2=\{Y_2,\emptyset,\{1\},\{3\},\{1,3\}\}$$

ailesi Y_2 kümesi üzerinde bir topoloji olsun. $f_1\colon X\to Y_1$ fonksiyonu, $f_1(a)=2$, $f_1(b)=1$, $f_1(c)=1$, $f_1(d)=2$ ve $f_2\colon X\to Y_2$ fonksiyonu, $f_2(a)=3$, $f_2(b)=2$, $f_2(c)=1$, $f_2(d)=2$ olmak üzere X kümesi üzerindeki başlangıç topolojisini bulalım.

Çözüm: $\mathcal{S}$ ailesinin elemanları σ_1 ve σ_2 ailelerinin öngörüntüleri olacağından

$$\begin{array}{lcccc} & \in\sigma_1 & & \in\mathcal{S} \\ f_1^{-1} & (\emptyset) & = & \emptyset \\ f_1^{-1} & (Y_1) & = & X \\ f_1^{-1} & (\{1\}) & = & \{b\} \end{array} \qquad \begin{array}{lcccc} & \in\sigma_2 & & \in\mathcal{S} \\ f_2^{-1} & (\emptyset) & = & \emptyset \\ f_2^{-1} & (Y_2) & = & X \\ f_2^{-1} & (\{1\}) & = & \{c\} \end{array} \qquad \begin{array}{lcccc} & \in\sigma_2 & & \in\mathcal{S} \\ f_2^{-1} & (\{3\}) & = & \{a\} \\ f_2^{-1} & (\{1,3\}) & = & \{a,c\} \\ & & & \end{array}$$

$$\mathcal{S} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a\}, \{a,c\}\}$$

olur. $\mathcal{S}$ ailesinin sonlu arakesitlerinden $\mathcal{B}$ ailesi ve son olarak $\mathcal{B}$ ailesinin ürettiği topoloji $\tau(\mathcal{S})$ bulunur.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a\}, \{a,c\}\} \arrow[d, bend right, "\text{sonlu arakesit}"'] \\ \mathcal{B} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a\}, \{a,c\}\} \arrow[d, bend right, "\text{herhangi birleşim}"'] \\ \tau(\mathcal{S}) = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\} \end{tikzcd}$$

Sonuç olarak ψ ailesi σ_1 ve σ_2 ailelerinin f_1 ve f_2 fonksiyonlarına göre X kümesi üzerindeki başlangıç topolojisidir. □

Teorem 4.2.10 *$X \neq \emptyset$, $(Y_i, \sigma)_{i\in I}$ topolojik uzaylar ailesi, ve her $i \in I$ için $f_i \colon X \to Y_i$ olmak üzere $(f_i)_{i\in I}$ fonksiyonlar ailesi için (X, ψ) başlangıç topolojisi olsun.*
$g \colon (Z, \phi) \to (X, \psi)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart her $i \in I$ için $f_i \circ g \colon (Z, \phi) \to (Y_i, \sigma_i)$ fonksiyonunun sürekli olmasıdır.

İspat.

$$\begin{tikzcd} (Z,\phi) \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f_i \circ g"'] & (X,\psi) \arrow[r, "f_i"] & (Y_i,\sigma_i) \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ $g \colon (Z, \phi) \to (X, \psi)$ fonksiyonu sürekli olsun. Her $i \in I$ için f_i fonksiyonları sürekli olduğundan $f_i \circ g \colon (Z, \phi) \to (Y_i, \sigma_i)$ bileşke fonksiyonu sürekli olur.

$\Leftarrow$ $f_i \circ g \colon (Z, \phi) \to (Y_i, \sigma_i)$ bileşke fonksiyonu sürekli olsun. (X, ψ) başlangıç topolojisinin tabanı $\mathcal{S}$ olmak üzere tabandaki her elemanın öngörüntüsünün (Z, ϕ) uzayında açık küme olduğunu gösterelim. $A \in \mathcal{S}$ olsun. Başlangıç uzayının tabanının tanımından $A = f^{-1}(V)$ olacak şekilde $V \in \sigma_i$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} g^{-1}(A) &= g^{-1}\left(f^{-1}(V)\right) \\ &= (f_i \circ g)^{-1}(V) \\ &\Rightarrow (f_i \circ g)^{-1}(V) \in \phi \\ &\Rightarrow g^{-1}(A) \in \phi \qquad \text{...}(f_i \circ g \;\; \text{sürekli}) \\ &\Rightarrow g \;\; \text{sürekli} \end{aligned}$$

elde edilir. □

4.3 Çarpım Topolojisi

Çarpım topolojisi farklı topolojik uzayların elemanlarını içeren yeni bir topolojik uzayın nasıl oluşturulacağını belirtir. (X, τ) ve (Y, σ) iki topolojik uzay olmak üzere, X ve Y kümelerinin kartezyen çarpımı $X \times Y$ olarak gösterilir ve (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylarının açık kümeleri yardımıyla $X \times Y$ üzerinde bir topoloji tanımlanabilir. Bu yöntem genelleştirilerek bir I indis ailesi için $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ topolojik uzaylarının çarpımı için tanımlanır.

Tanım 4.3.1 *$(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ topolojik uzayları verilsin.*

$$X = \prod_{i \in I} X_i$$

*çarpım kümesi üzerinde her $i \in I$ için $\pi_i \colon X \to X_i$ izdüşüm fonksiyonlarını sürekli olacak şekilde X kümesi üzerindeki en kaba topolojiye (X_i, τ_i) uzaylarının **çarpım topolojisi** denir ve $\wp$ ile gösterilir. $(X, \wp)$ uzayına (X_i, τ_i) uzaylarının **çarpım uzayı**, her $i \in I$ için (X_i, τ_i) uzayına **çarpan uzayı** denir.*

Not. Başlangıç uzayı tanımında f_i fonksiyonları yerine özel olarak π_i fonksiyonları alınırsa çarpım topolojisi elde edildiğinden çarpım topolojisi başlangıç topolojsinin bir uygulaması olur. □

Örnek 4.3.2 *Başlangıç topolojisinin alt tabanı*

$$\mathcal{S} = \{A_{i_j} \subset X \;:\; \exists i \in I,\; \exists V \in \sigma_i,\; \ni A_{i_j} = f_i^{-1}(V)\}$$

olduğundan f_i fonksiyonları yerine π_i fonksiyonları alınırsa, (X_i, τ_i) uzaylarının çarpım uzayı $(X, \wp)$ uzayının alt tabanı

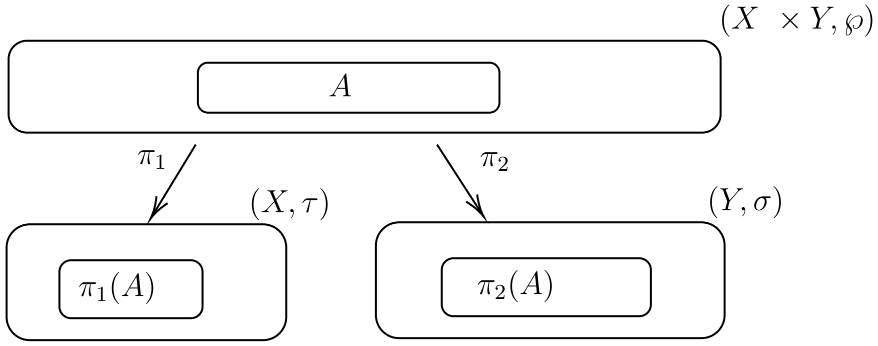
$$\mathcal{S} = \{\pi_i^{-1}(V_i) \;: V_i \in \tau_i\}$$

olur.

Sonuç 4.3.3 *Çarpım uzayında bir kümenin açık küme olması için gerek ve yeter şart bu kümenin her bir izdüşümünün çarpan uzaylarında açık küme olmasıdır.*

$$A \in \wp \Leftrightarrow \forall i \in I,\ \pi_i(A) \in \tau_i$$

Örnek 4.3.4 *(X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzayları için $(X \times Y, \wp)$ çarpım uzayında açık ve kapalı kümeler için kriterleri verelim.*



$$A \in \wp \ \Leftrightarrow \pi_1(A) \in \tau,\ \pi_2(A) \in \ \sigma$$

Açık kümenin tümeleyeni kapalı küme olacağından

$$F \in \wp^t \ \Leftrightarrow \pi_1(F) \in \tau^t,\ \pi_2(F) \in \ \sigma^t$$

olur.

Örnek 4.3.5 *(X_1, τ_1) ve (X_2, τ_2) topolojik uzaylar olmak üzere $(X_1 \times X_2, \wp)$ çarpım topolojisi verilsin.*

- $\pi_1 \colon X_1 \times X_2 \to X_1$ *fonksiyonu için*

  $$\forall\ A\ \in\ \tau_1 \text{ için } \pi_1^{-1}(A) = \underbrace{\overset{\in \tau_1}{A} \times \overset{\in \tau_2}{X_2}}_{\in \wp}$$

  olduğundan $\pi_1 \colon (X_1, \tau_1) \to (X_1 \times X_2, \wp)$ fonksiyonu süreklidir.

- $A_1 \times A_2 \in \wp$ *açık kümesi için*

  $$\pi_1(A_1 \times A_2) = A_1 \in \tau_1$$

  olduğundan $\pi_1 \colon (X_1, \tau_1) \to (X_1 \times X_2, \wp)$ fonksiyonu açık fonksiyon olur

Örnek 4.3.6 *$X = \{a, b\}$ ve $Y = \{u, v, z\}$ kümeleri verilsin. X kümesi üzerinde*

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$$

topolojisi ve Y kümesi üzerinde

$$\sigma = \{Y, \emptyset, \{u\}, \{u, v\}\}$$

topolojisi verilsin. $X \times Y$ çarpım kümesi üzerindeki çarpım topolojisini bulalım.

Çözüm: İlk olarak $X \times Y$ kümesini yazalım.

$$X \times Y = \{(a, u), (a, v), (a, z), (b, u), (b, v), (b, z)\}$$

Başlangıç topolojisinde olduğu gibi τ ve σ ailelerinin izdüşüm fonksiyonları ile öngörüntülerini alarak alt tabanın elemanlarını oluşturalım.

$$\begin{array}{lccl} & \in\tau & & \in\mathcal{S} \\ \pi_1^{-1} & (\emptyset) & = & \emptyset \\ \pi_1^{-1} & (X) & = & X \times Y \\ \pi_1^{-1} & (\{a\}) & = & \{(a, u)(a, v)(a, z)\} \end{array} \qquad \begin{array}{lccl} & \in\sigma & & \in\mathcal{S} \\ \pi_2^{-1} & (\emptyset) & = & \emptyset \\ \pi_2^{-1} & (Y) & = & X \times Y \\ \pi_2^{-1} & (\{u\}) & = & \{(a, u)(b, u)\} \\ \pi_2^{-1} & (\{u, v\}) & = & \{(a, u)(b, u)(a, v), (b, v)\} \end{array}$$

$$\mathcal{S} = \{X \times Y, \emptyset, \overbrace{\{\underbrace{(a, u)}_{e_1}, \underbrace{(a, v)}_{e_2}, \underbrace{(a, z)}_{e_3}\}}^{A}, \overbrace{\{\underbrace{(a, u)}_{e_1}, \underbrace{(b, u)}_{e_4}\}}^{B}, \overbrace{\{\underbrace{(a, u)}_{e_1}, \underbrace{(b, u)}_{e_4}, \underbrace{(a, v)}_{e_2}, \underbrace{(b, v)}_{e_5}\}}^{C}\}$$

$\mathcal{S}$ ailesinin elemanlarının sonlu arakesitlerinden $\mathcal{B}$ tabanını elde ederiz.

$$\mathcal{B} = \{X \times Y, \emptyset, A, B, C, \underbrace{\{(a, u)\}}_{A \cap B}, \underbrace{\{(a, u), (a, v)\}}_{A \cap C}\}$$

$\mathcal{B}$ ailesinin elamanlarının herhangi birleşiminden $\mathcal{S}$ alt tabanının ürettiği topoloji $\tau(\mathcal{S})$ elde edilir.

$$\begin{aligned} \tau(\mathcal{S}) \quad = \quad & \Bigg\{ X \times Y, \emptyset, A, B, C, A \cap B, A \cap C, \underbrace{\{(a, u), (a, v), (a, z), (b, u)\}}_{A \cup B} \\ & , \underbrace{\{(a, u), (a, v), (a, z), (b, u), (b, v)\}}_{A \cup C}, \underbrace{\{(a, u), (a, v), (b, u)\}}_{(A \cap C) \cup B} \Bigg\} \end{aligned}$$

$\square$

Tanım 4.3.7 *(X_1, τ_1) ve (X_2, τ_2) topolojik uzaylarının çarpım uzayı $(X = X_1 \times X_2, \wp)$ olsun. $V = V_1 \times V_2 \subset X$ alt kümesi ve $x = (x_1, x_2) \in X$ noktası için $x \in U = U_1 \times U_2 \subset V$ olacak şekilde bir $U \in \wp$ açık kümesi varsa V kümesine x noktasının bir komşuluğu denir.*

$$V_1 \times V_2 = V \in \vartheta_{(x)} \quad \Leftrightarrow \quad x = (x_1, x_2) \in \underbrace{U = U_1 \times U_2}_{\in \wp} \subset V$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \exists U_1 \in \tau_1 \ \ni x_1 \in U_1 \subset V_1 \\ \exists U_2 \in \tau_2 \ \ni x_2 \in U_2 \subset V_2 \end{array}$$

Teorem 4.3.8 *(X_1, τ_1) ve (X_2, τ_2) topolojik uzaylarının çarpım uzayı $(X = X_1 \times X_2, \wp)$ olsun. $A_1 \times A_2 \subset X$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.*

(i) $(A_1 \times A_2)^- = \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$

(ii) $(A_1 \times A_2)^\circ = \mathring{A}_1 \times \mathring{A}_2$

İspat. (**i**) $x = (x_1, x_2) \in (A_1 \times A_2)^-$ için

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \in (A_1 \times A_2)^- \quad &\Leftrightarrow \quad \forall V = V_1 \times V_2 \in \vartheta_{(x)}, (A_1 \times A_2) \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset^- \\ &\Leftrightarrow \quad (A_1 \times V_1) \cap (A_2 \times V_2) \neq \emptyset^- \qquad \text{...(değiştokuş kuralı)} \\ &\Leftrightarrow \quad A_1 \times V_1 \neq \emptyset^- \quad \text{ve} \quad A_2 \times V_2 \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \forall V_1 \in \vartheta_{(x_1)}, \ A_1 \times V_1 \neq \emptyset^- \\ \forall V_2 \in \vartheta_{(x_2)}, \ A_2 \times V_2 \neq \emptyset^- \end{array} \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 \in \bar{A}_1 \quad \text{ve} \quad x_2 \in \bar{A}_2 \\ &\Leftrightarrow \quad (x_1, x_2) \in \bar{A}_1 \times \bar{A}_2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$(A_1 \times A_2)^- = \bar{A}_1 \times \bar{A}_2$$

elde edilir.

(**ii**) $x = (x_1, x_2) \in (A_1 \times A_2)^\circ$ için

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \in (A_1 \times A_2)^\circ \quad &\Rightarrow \quad \exists U = U_1 \times U_2 \in \wp, \ \ni (x_1, x_2) \in U \subset (A_1 \times A_2) \\ &\Rightarrow \quad \begin{array}{l} U_1 \in \tau_1, x_1 \in U_1 \subset A_1 \\ U_2 \in \tau_2, x_2 \in U_2 \subset A_2 \end{array} \\ &\Rightarrow \quad x_1 \in \mathring{A}_1 \quad \text{ve} \quad x_2 \in \mathring{A}_2 \\ &\Rightarrow \quad (x_1, x_2) \in \mathring{A}_1 \times \mathring{A}_2 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $A_1 \times A_2 \subset X$ için

$$\overset{\circ}{A_1} \subset A_1, \overset{\circ}{A_2} \subset A_2 \quad \Rightarrow \quad \overset{\circ}{A_1} \times \overset{\circ}{A_2} \subset A_1 \times A_2 \qquad \ldots \left(\overset{\circ}{A_1} \in \tau_1, \overset{\circ}{A_2} \in \tau_2 \Rightarrow \overset{\circ}{A_1} \times \overset{\circ}{A_2} \in P \right)$$

$$\Rightarrow \quad (A_1 \times A_2)^\circ \subset \overset{\circ}{A_1} \times \overset{\circ}{A_2} \qquad \ldots \left(\begin{array}{c} (A_1 \times A_2)^\circ \text{ kümesi } A_1 \times A_2 \\ \text{kümesinin kapsadığı en} \\ \text{büyük açık küme} \end{array} \right)$$

(2)

olur. (1) ve (2) ifadelerinden

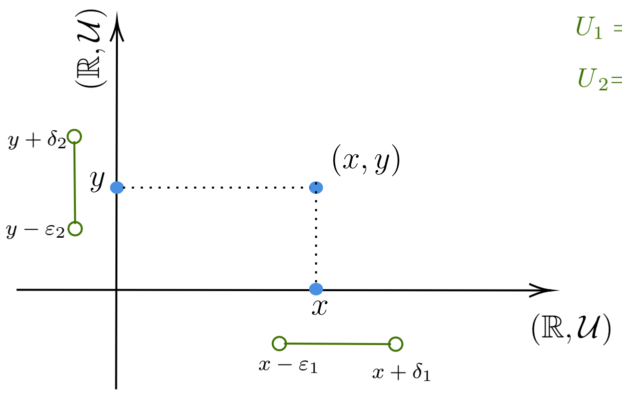
$$(A_1 \times A_2)^\circ = \overset{\circ}{A_1} \times \overset{\circ}{A_2}$$

eşitliği elde edilir.

$\square$

Örnek 4.3.9 $\mathbb{R}^2$ *üzerinde alışılmış uzay verilsin. Yani* $(\mathbb{R}^2, \wp) = (\mathbb{R}, \mathcal{U}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{U})$ *olsun.* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *noktasının komşuluklarını inceleyelim.* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta_1, \delta_2 > 0$

Çözüm: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta_1, \delta_2 > 0$ olmak üzere



$U_1 =]x - \varepsilon_1, x + \delta_1[$

$U_2 =]y - \varepsilon_2, y + \delta_2[$

$$x_1 \in \underbrace{U_1}_{\in \mathcal{U}} \subset V_1 \Rightarrow V_1 \in \vartheta_{(x)}$$

$$x_2 \in \underbrace{U_2}_{\in \mathcal{U}} \subset V_2 \Rightarrow V_2 \in \vartheta_{(x)}$$

$$V_1 \times V_2 \in \vartheta_{(x,y)}$$

$$V_1 \times V_2 \in \vartheta_{(x,y)} \Leftrightarrow V_1 \in \vartheta_{(x)} \ \wedge \ V_2 \in \vartheta_{(y)}$$

olmasıdır. $\square$

Örnek 4.3.10 $(\mathbb{R}^2, \wp) = (\mathbb{R}, \mathcal{U}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{D}^{\rightarrow})$ *olsun.* $A = A_1 \times A_2 =]1, 4[\times]3, 7]$ *olmak üzere* A *kümesinin çarpım uzayında kapanışı*

$$\begin{aligned} \bar{A} &= (A_1 \times A_2)^{-} \\ &= (\bar{A_1})_{\mathcal{U}} \times (\bar{A_2})_{\mathcal{D}^{\rightarrow}} \\ &= [1, 4] \times \ ] - \infty, 7] \end{aligned}$$

olur.

Örnek 4.3.11 $(\mathbb{R}^2, \wp) = (\mathbb{R}, \mathcal{U}) \times (\mathbb{R}, ^{\leftarrow}\mathcal{D})$ *olsun.* $A = A_1 \times A_2 =]1,4[\times]3,7]$ *olmak üzere A kümesinin çarpım uzayında içi*

$$\begin{aligned} \mathring{A} &= (A_1 \times A_2)^{\circ} \\ &= (\mathring{A}_1)_{\mathcal{U}} \times (\mathring{A}_2)_{\leftarrow\mathcal{D}} \\ &=]1,4[\times \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

olur.

4.4 Sonuç Topolojisi ve Bölüm Topolojisi

Bu bölümde verilen bir fonksiyondan yararlanarak tanım kümesi üzerindeki topolojiden görüntü kümesi üzerinde bir topoloji elde edeceğiz. Sonrasında bu yöntemi genelleştirerek başlangıç topolojisinin duali olan sonuç topolojisi tanımını vereceğiz.

Teorem 4.4.1 *$f : X \to Y$ bir fonksiyon ve τ ailesi X kümesi üzerinde bir topoloji olmak üzere*

$$\sigma_f = \{B \subset Y \ : \ f^{-1}(B) \in \tau\}$$

ailesi Y kümesi üzerinde bir topoloji belirtir.

İspat. T_1. (X, τ) bir topolojik uzay olduğundan $\emptyset, X \in \tau$ ve

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$
$$f^{-1}(Y) = X$$

olduğundan $\emptyset, Y \in \sigma_f$ olur.

T_2. I herhangi bir indis ailesi olmak üzere her $i \in I$ için $B_i \in \sigma_f$ olsun. $\bigcup\limits_{i \in I} B_i \in \sigma_f$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
B_i \in \sigma_f \quad &\Rightarrow \quad f^{-1}(B_i) \in \tau \\
&\Rightarrow \quad \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \in \tau && \text{... } (\tau \text{ topoloji}) \\
&\Rightarrow \quad f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) \in \tau \quad \text{...} \left(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right)\right) \\
&\Rightarrow \quad \bigcup_{i \in I} B_i \in \sigma_f
\end{aligned}$$

T_3. $B_1, B_2 \in \sigma_f$ olsun. $B_1 \cap B_2 \in \sigma_f$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
B_1, B_2 \in \sigma_f \quad &\Rightarrow \quad f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2) \in \tau \\
&\Rightarrow \quad f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \in \tau && \text{... } (\tau \text{ topoloji}) \\
&\Rightarrow \quad f^{-1}(B_1 \cap B_2) \in \tau && \text{... } (f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2)) \\
&\Rightarrow \quad B_1 \cap B_2 \in \sigma_f
\end{aligned}$$

□

Tanım 4.4.2 *$f : X \to Y$ bir fonksiyon ve τ ailesi X kümesi üzerinde bir topoloji olmak üzere Y kümesi üzerindeki*

$$\sigma_f = \{B \subset Y \ : \ f^{-1}(B) \in \tau\}$$

*topolojisine **identifikasyon topolojisi**, (Y, σ_f) uzayına (X, τ) uzayının **identifikasyon uzayı**, $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma_f)$ dönüsümüne **identifikasyon dönüşümü** denir.*

Uyarı 4.4.3 *(X, τ) topolojik uzay ve Y kümesi üzerinde*

$$\sigma_f = \{B \subset Y \ : \ f^{-1}(B) \in \tau\}$$

topolojisi olmak üzere $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma_f)$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda;

- *f örtendir.*
- *τ topolojisi değiştikçe σ_f ailesi değişir.*
- *f fonksiyonunun tanımı değiştikçe σ_f ailesi değişir.*
- *her $B \in \sigma_f$ açık kümesi için $f^{-1}(B) \in \tau$ olduğundan $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma_f)$ fonksiyonu süreklidir.*

Örnek 4.4.4 *$X = \{1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ topolojisi ve $Y = \{a, b\}$ kümesi üzerinde $\sigma = \{Y, \emptyset, \{a\}\}$ topolojisi verilsin.*

- *$f : X \to Y$, $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = a$ olmak üzere*

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau$$
$$f^{-1}(Y) = X \in \tau$$
$$f^{-1}(\{a\}) = \{1, 3\} \in \tau$$

  olduğundan f identifikasyon dönüşümü olur.

- *$g : X \to Y$, $g(1) = b$, $g(2) = a$, $g(3) = a$ olmak üzere*

$$g^{-1}(\{a\}) = \{2\} \notin \tau$$

  olduğundan g identifikasyon dönüşümü olmaz.

Teorem 4.4.5 *(X, τ) topolojik uzay ve Y kümesi üzerinde*

$$\sigma_f = \{B \subset Y \ : \ f^{-1}(B) \in \tau\}$$

topolojisi olmak üzere $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ sürekli bir fonksiyon ise

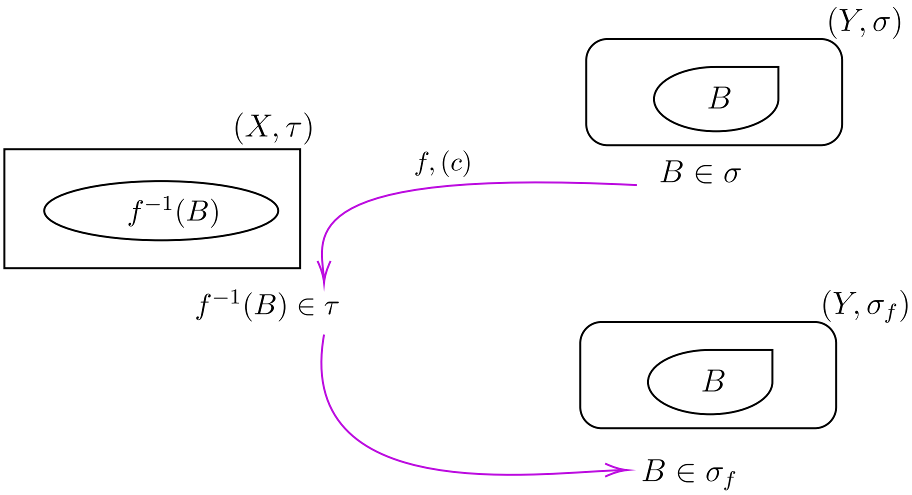
$$\sigma \subset \sigma_f$$

olur.

İspat. $B \in \sigma$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} B \in \sigma \quad &\Rightarrow \quad f^{-1}(B) \in \tau && \text{...}(f \text{ sürekli}) \\ &\Rightarrow \quad A \in \sigma_f && \text{...}(\sigma_f \text{ tanımından}) \\ &\Rightarrow \quad \sigma \subset \sigma_f \end{aligned}$$

elde edilir.



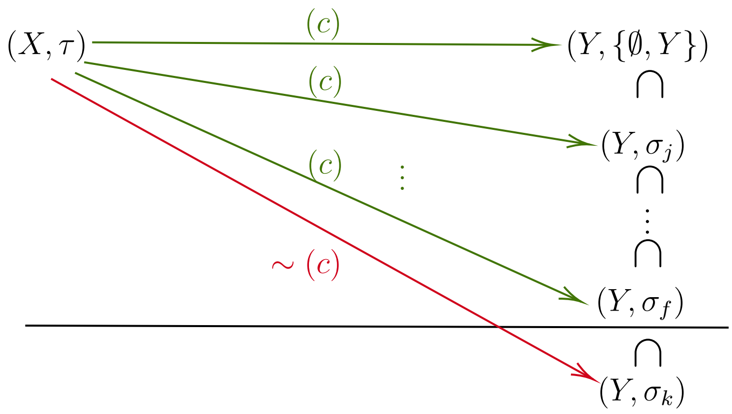
□

Sonuç 4.4.6 *(X, τ) topolojik uzay ve Y kümesi üzerinde*

$$\sigma_f = \{B \subset Y \ : \ f^{-1}(B) \in \tau\}$$

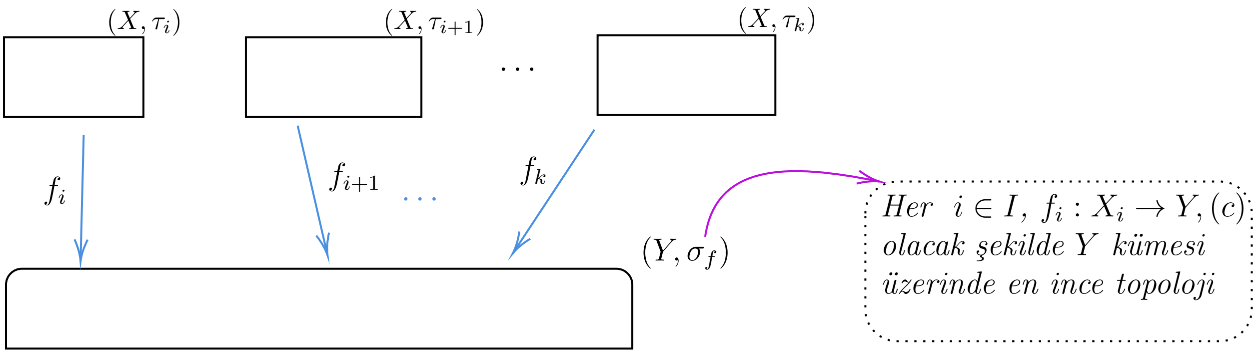
topolojisi olmak üzere $f : X \to Y$ fonksiyonu sürekli olacak şekilde Y kümesi üzerinde tanımlanabilecek en ince topoloji σ_f topolojisidir.

Not. $f : (X, \tau) \to (Y, \{\emptyset, Y\})$ fonksiyonunun her zaman sürekli olduğunu biliyoruz. Görüntü kümesindeki topoloji inceldikçe süreklilik özelliği azalacak ve bir yerden sonra süreklilik sağlanmayacaktır. Burada sürekliliği sağlayan en ince topoloji σ_f topolojisi olacaktır.



$\square$

Tanım 4.4.7 *$(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ topolojik uzaylar ailesi, ve her $i \in I$ için $f_i\colon X_i \to Y$ olmak üzere $(f_i)_{i\in I}$ fonksiyonlar ailesi verilsin. Her $i \in I$ için f_i fonksiyonları sürekli olacak şekilde Y kümesi üzerindeki en ince topolojiyi $\mathcal{V}$ ile gösterelim. $\mathcal{V}$ topolojisine $(\tau_i)_{i\in I}$ topolojilerinin $(f_i)_{i\in I}$ fonksiyonlar ailesine göre **sonuç topolojisi** denir. $(Y, \mathcal{V})$ uzayına da $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ uzaylarının $(f_i)_{i\in I}$ fonksiyonlar ailesine göre **sonuç uzayı** denir.*



Sonuç 4.4.8 *$\mathcal{V}$ topolojisi $((X_i, \tau_i), f_i)_{i\in I}$ ailesine karşılık gelen sonuç topolojisi olmak üzere*

(**i.**) *Her $i \in I$ için $f_i\colon (X_i, \tau_i) \to (Y, \mathcal{V})$ fonksiyonu süreklidir.*

(**ii.**) *Her $i \in I$ için $f_i\colon (X_i, \tau_i) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu sürekli ise $\sigma \subset \mathcal{V}$ olur.*

Sonuç 4.4.9 *$(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ topolojik uzaylar ailesi, ve her $i \in I$ için $f_i\colon X_i \to Y$, $(f_i)_{i\in I}$ fonksiyonlar ailesi ve $(Y, \mathcal{V})$ sonuç topolojisi olmak üzere*

(**i.**) $B \subset Y,\ B \in \mathcal{V} \Leftrightarrow \forall i \in I,\ f_i^{-1}(B) \in \tau_i$

(**ii.**) $F \subset Y,\ F \in \mathcal{V}^t \Leftrightarrow \forall i \in I,\ f_i^{-1}(F) \in \tau_i^t$ *ifadeleri sağlanır.*

Teorem 4.4.10 *$(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ topolojik uzaylar ailesi, ve her $i \in I$ için $f_i\colon X_i \to Y$ olmak üzere $(f_i)_{i\in I}$ fonksiyonlar ailesi verilsin. $(Y, \mathcal{V})$ sonuç topolojisi olsun.*
$g\colon (Y, \mathcal{V}) \to (Z, \phi)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart her $i \in I$ için $g \circ f_i\colon (X_i, \tau_i) \to (Z, \phi)$ fonksiyonunun sürekli olmasıdır.

İspat.

$$\begin{tikzcd}
(X_i, \tau_i) \arrow[r, "f_i"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f_i"'] & (Y, \mathcal{V}) \arrow[r, "g"] & (Z, \phi)
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ $g\colon (Y, \mathcal{V}) \to (Z, \phi)$ fonksiyonu sürekli olsun. Her $i \in I$ için f_i fonksiyonları sürekli olduğundan $g \circ f_i\colon (X_i, \tau_i) \to (Z, \phi)$ bileşke fonksiyonu sürekli olur.

$\Leftarrow$ $g \circ f_i : (X_i, \tau_i) \to (Z, \phi)$ bileşke fonksiyonu sürekli olsun. $A \in \phi$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} A \in \varphi \quad &\Rightarrow \quad (g \circ f_i)^{-1}(A) \in \tau_i \quad ... (g \circ f_i \text{ sürekli}) \\ &\Rightarrow \quad f_i^{-1}\left(g^{-1}(A)\right) \in \tau_i \\ &\Rightarrow \quad g^{-1}(A) \in \mathcal{V} \\ &\Rightarrow \quad g \;\; \text{sürekli} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Tanım 4.4.11 *(X, τ) topolojik uzay ve X kümesi üzerinde $\Re$ bir denklik bağıntısı olmak üzere*

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & X & \to & X/\Re \\ & x & \mapsto & \varphi(x) = [x] \end{array}$$

bölüm dönüşümü *(kanonik izdüşümü) sürekli olacak şekilde $X/\Re$ kümesi üzerindeki en ince topolojiye* ***bölüm topolojisi*** *denir ve $\Re$ ile gösterilir. $(X, X/\Re)$ uzayına (X, τ) uzayının $\Re$ bağıntısına göre* ***bölüm uzayı*** *denir.*

Not. Sonuç uzayı tanımında f_i fonksiyonları yerine özel olarak ϕ kanonik izdüşümleri alınırsa bölüm topolojisi elde edildiğinden bölüm topolojisi sonuç topolojsinin bir uygulaması olur. □

Teorem 4.4.12 *(X, τ) topolojik uzay ve X kümesi üzerinde $\Re$ bir denklik bağıntısı olmak üzere $(X, X/\Re)$ bölüm uzayı için aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(**i**.) $U \subset X/\Re,\; U \in \Re \Leftrightarrow \phi^{-1}(U) \in \tau$

(**ii**.) $F \subset X/\Re,\; U \in \Re^t \Leftrightarrow \phi^{-1}(F) \in \tau^t$

Dizin

Kaynakça

[1] Adams, Colin Conrad, and Robert David Franzosa. "Introduction to topology: pure and applied. (2008).

[2] Adhikari, Avishek, and Mahima Ranjan Adhikari. Basic Topology. Springer, 2022.

[3] Armstrong, Mark Anthony. Basic topology. Springer Science & Business Media, 2013.

[4] Brown, Ronald. "Topology and groupoids." (2006).

[5] Conover, Robert A. A first course in Topology: an introduction to mathematical thinking. Courier Corporation, 2014.

[6] Crossley, Martin D. Essential topology. Springer Science & Business Media, 2006.

[7] Earl, Richard. Topology: A Very Short Introduction. Oxford University Press, 2019.

[8] Gamelin, Theodore W., and Robert Everist Greene. Introduction to topology. Courier Corporation, 1999.

[9] Hocking, John Gilbert, and Gail S. Young. Topology. Courier Corporation, 1988.

[10] Janich, Klaus. "Topology (Undergraduate Texts in Mathematics)." (1984).

[11] Karaca, İsmet. "Topoloji Ders Notları."

[12] Kelly, John L. "General Topology, The University Series in Higher Mathematics." (1955).

[13] Mendelson, Bert. Introduction to topology. Courier Corporation, 1990.

[14] Lipschutz, Seymour. Schaum's outline of theory and problems of general topology. (1965).

[15] Parthasarathy, K. Topology: An Invitation. Vol. 134. Springer Nature, 2022.

[16] Richeson, David S. Euler's gem: the polyhedron formula and the birth of topology. Vol. 64. Princeton University Press, 2019.

[17] Richmond, Tom. General Topology: An Introduction. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2020.

[18] Runde, Volker, K. A. Ribet, and S. Axler. A taste of topology. Berlin: Springer, 2005.

[19] Saveliev, Peter. Topology illustrated. (2016).

[20] Singh, Tej Bahadur. Introduction to topology. Springer, 2019.

[21] Yüksel, Şaziye. Genel Topoloji. No. 109. Eğitim Yayınevi, 2014.

[22] Wang, Guoliang. Lecture Notes on General Topology. 2021.

[23] Willard, Stephen. General topology. Courier Corporation, 2012.

ESOGÜ BASIMEVİ

978-605-9975-91-9